Da Faà di Bruno a Feynman, e oltre

A. Frabetti (Lyon, Francia)

Torino 22 Settembre 2017

I - Faà di Bruno e i diffeomorfismi formali

II - Feynman e i diffeografismi

III - Gruppi proalgebrici con coefficienti non commutativi

IV - Loop dei diffeomorfismi formali

I - Faà di Bruno e i diffeomorfismi formali

La formula "classica" di Faà di Bruno

- **Faà di Bruno** (1855): $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili

$$\boxed{(f \circ g)^{(n)}(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{(k_i)} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \, f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n}}$$

dove $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ t.c. $k_1 + \cdots + k_n = m$ e $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

Esempio: $(f \circ g)'''(t) = f'\big(g(t)\big)\, g'''(t) + 3f''\big(g(t)\big)\, g'(t) g''(t) + f'''\big(g(t)\big)\, g'(t)^3$

La formula “classica” di Faà di Bruno

- **Faà di Bruno** (1855): $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili

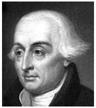
$$\boxed{(f \circ g)^{(n)}(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{(k_i)} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \, f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n}}$$

dove $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ t.c. $k_1 + \cdots + k_n = m$ e $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

Esempio: $(f \circ g)'''(t) = f'\big(g(t)\big)\, g'''(t) + 3f''\big(g(t)\big)\, g'(t) g''(t) + f'''\big(g(t)\big)\, g'(t)^3$

- **Lagrange** (1770): se $f'(t_0) \neq 0$, intorno a $u_0 = f(t_0)$ si ha

$$\boxed{f^{-1}(u) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{-n} \Bigg|_{t=t_0} (u - u_0)^n + O\big((u - u_0)^{N+1}\big)}$$



Esempio: $f(t) = t + t^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(u) = u - u^2 + 2u^{2}3 - 5u^4 + 14u^5 + \cdots$

La formula "classica" di Faà di Bruno

- **Faà di Bruno** (1855): $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili

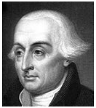
$$\boxed{(f \circ g)^{(n)}(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{(k_i)} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!}\; f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n}}$$

dove $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ t.c. $k_1 + \cdots + k_n = m$ e $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

Esempio: $(f \circ g)'''(t) = f'\big(g(t)\big)\, g'''(t) + 3f''\big(g(t)\big)\, g'(t) g''(t) + f'''\big(g(t)\big)\, g'(t)^3$

- **Lagrange** (1770): se $f'(t_0) \neq 0$, intorno a $u_0 = f(t_0)$ si ha

$$\boxed{f^{-1}(u) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}\, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{-n} \bigg|_{t=t_0} (u - u_0)^n + O((u - u_0)^{N+1})}$$



Esempio: $f(t) = t + t^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(u) = u - u^2 + 2u^{2}3 - 5u^4 + 14u^5 + \cdots$

- **Gruppo dei diffeomorfismi**:

composizione	$(f \circ g)(t) := f\big(g(t)\big)$
unità	$\mathbf{1}(t) := t$
reciproca	$f^{-1}(u) := t$ se $u = f(t)$

La formula “classica” di Faà di Bruno

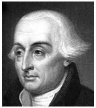
- **Faà di Bruno** (1855): $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili

$$\boxed{(f \circ g)^{(n)}(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{(k_i)} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \, f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n}}$$

dove $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ t.c. $k_1 + \cdots + k_n = m$ e $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

Esempio: $(f \circ g)'''(t) = f'\big(g(t)\big)\, g'''(t) + 3f''\big(g(t)\big)\, g'(t) g''(t) + f'''\big(g(t)\big)\, g'(t)^3$

- **Lagrange** (1770): se $f'(t_0) \neq 0$, intorno a $u_0 = f(t_0)$ si ha



$$\boxed{f^{-1}(u) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{-n} \Bigg|_{t=t_0} (u - u_0)^n + O\big((u - u_0)^{N+1}\big)}$$

Esempio: $f(t) = t + t^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(u) = u - u^2 + 2u^2 3 - 5u^4 + 14u^5 + \cdots$

- **Gruppo dei diffeomorfismi**:

composizione	$(f \circ g)(t) := f\big(g(t)\big)$
unità	$\mathbf{1}(t) := t$
reciproca	$f^{-1}(u) := t$ se $u = f(t)$

fissa la struttura in geometria

ma ha dimensione infinita,
varie topologie e metriche,
non è localmente compatto...

Diffeomorfismi formali

A algebra associativa e commutativa su un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,...)

- **Gruppo dei diffeomorfismi formali**:

$$\boxed{\mathrm{Diff}(A) = \left\{ f(t) = \sum_{n\geqslant 0} f_n \; t^{n+1} \;\middle|\; f_0 = 1,\; f_n \in A \right\}}$$

con composizione $(f \circ g)(t) = \sum_{m\geqslant 0} f_m \; g(t)^{m+1}$, unità e reciproca usuali.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Diff}(A)$ è limite proiettivo di gruppi di matrici (dim. finita) e ha ottime proprietà!

Diffeomorfismi formali

A algebra associativa e commutativa su un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,...)

- **Gruppo dei diffeomorfismi formali**:

$$\boxed{\mathrm{Diff}(A) = \left\{ f(t) = \sum_{n\geqslant 0} f_n \, t^{n+1} \;\middle|\; f_0 = 1,\; f_n \in A \right\}}$$

con composizione $(f \circ g)(t) = \sum_{m\geqslant 0} f_m \, g(t)^{m+1}$, unità e reciproca usuali.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Diff}(A)$ è limite proiettivo di gruppi di matrici (dim. finita) e ha ottime proprietà!

- **Faà di Bruno**: formula esplicita per la composizione

$$\boxed{(f \circ g)(t) = \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{(p_i)} \frac{(m+1)!}{p_0!p_1!\cdots p_n!} \; f_m \; g_1^{p_1} \cdots g_n^{p_n} \right) t^{n+1}}$$

dove $p_0, ..., p_n \in \mathbb{N}$ t.c. $p_0+\cdots+p_n = m+1$ e $p_1+2p_2+\cdots+np_n = n-m$.

Diffeomorfismi formali

A algebra associativa e commutativa su un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,...)

- **Gruppo dei diffeomorfismi formali**:

$$\boxed{\mathrm{Diff}(A) = \Big\{ \, f(t) = \sum_{n\geqslant 0} f_n \; t^{n+1} \; \Big| \; f_0 = 1, \; f_n \in A \, \Big\}}$$

con composizione $(f \circ g)(t) = \sum_{m\geqslant 0} f_m \; g(t)^{m+1}$, unità e reciproca usuali.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Diff}(A)$ è limite proiettivo di gruppi di matrici (dim. finita) e ha ottime proprietà!

- **Faà di Bruno**: formula esplicita per la composizione

$$\boxed{(f \circ g)(t) = \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{(p_i)} \frac{(m+1)!}{p_0!p_1!\cdots p_n!} \; f_m \; g_1^{p_1} \cdots g_n^{p_n} \right) t^{n+1}}$$

dove $p_0, ..., p_n \in \mathbb{N}$ t.c. $p_0+\cdots+p_n = m+1$ e $p_1+2p_2+\cdots+np_n = n-m$.

- **Lagrange**: esiste una versione esplicita, dettagli al prossimo convegno!

Algebre di Hopf e gruppi di convoluzione

Def. Un'**algebra di Hopf** è un'algebra H, con

moltiplicazione	$m : H \otimes H \to H$	associativa
unità	$u : \mathbb{K} \hookrightarrow H$	$1_A = u(1_\mathbb{K})$

e in più altre operazioni (morfismi unitari di algebre)

comoltiplicazione	$\Delta : H \to H \otimes H$	coassociativa
counità	$\varepsilon : H \to \mathbb{K}$	$+$ prop
antipodo	$S : H \to H$	$+$ prop

Algebre di Hopf e gruppi di convoluzione

Def. Un'**algebra di Hopf** è un'algebra H, con

moltiplicazione	$m : H \otimes H \to H$	associativa
unità	$u : \mathbb{K} \hookrightarrow H$	$1_A = u(1_{\mathbb{K}})$

e in più altre operazioni (morfismi unitari di algebre)

comoltiplicazione	$\Delta : H \to H \otimes H$	coassociativa
counità	$\varepsilon : H \to \mathbb{K}$	+ prop
antipodo	$S : H \to H$	+ prop

Prop. Se H è un'alg. di Hopf <u>commutativa</u>, e anche A è commutativa, l'insieme

$$\boxed{G(A) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om_{\mathbb{K}}}(H, A)}$$

è un **gruppo** con

convoluzione	$\alpha * \beta = m_A(\alpha \otimes \beta)\Delta_H$
unità	$u_A \, \varepsilon_H$
inversione	$\alpha^{-1} = \alpha \, S_H$

Algebra delle coordinate di un gruppo

Def. Un gruppo G isomorfo a $G(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om_{\mathbb{K}}}(H, A)$ si chiama

- **algebrico** se H è un'algebra finitamente generata (es. gruppo di matrici)
- **proalgebrico** se H è limite induttivo di algebre fin. gen. (es. $\mathrm{Diff}(A)$)

Algebra delle coordinate di un gruppo

Def. Un gruppo G isomorfo a $G(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Com}_{\mathbb{K}}}(H, A)$ si chiama
- **algebrico** se H è un'algebra <u>finitamente generata</u> (es. gruppo di matrici)
- **proalgebrico** se H è <u>limite induttivo</u> di algebre fin. gen. (es. $\mathrm{Diff}(A)$)

Prop. In tal caso, H è l'algebra dei **polinomi sulle funzioni "coordinate"**:

1) L'isom. $G \cong \mathrm{Hom}(H, A)$ è dato da
$$\boxed{\begin{aligned} g \mapsto \alpha_g : H &\to A \\ h &\mapsto \alpha_g(h) := h(g) \end{aligned}}$$

2) La struttura di gruppo su G induce quella di Hopf su H:

se $h\colon G \to \mathbb{K}$ e $g, g' \in G$
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta(h)(g, g') &= h(g \cdot g') \\ \varepsilon(h) &= h(1_G) \\ S(h)(g) &= h(g^{-1}). \end{aligned}}$$

Algebra delle coordinate di un gruppo

Def. Un gruppo G isomorfo a $G(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om_{\mathbb{K}}}(H, A)$ si chiama
- **algebrico** se H è un'algebra finitamente generata (es. gruppo di matrici)
- **proalgebrico** se H è limite induttivo di algebre fin. gen. (es. $\mathrm{Diff}(A)$)

Prop. In tal caso, H è l'algebra dei **polinomi sulle funzioni "coordinate"**:

1) L'isom. $G \cong \mathrm{Hom}(H, A)$ è dato da
$$\boxed{\begin{aligned} g \mapsto \alpha_g : H &\to A \\ h &\mapsto \alpha_g(h) := h(g) \end{aligned}}$$

2) La struttura di gruppo su G induce quella di Hopf su H:

se $h : G \to \mathbb{K}$ e $g, g' \in G$
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta(h)(g, g') &= h(g \cdot g') \\ \varepsilon(h) &= h(1_G) \\ S(h)(g) &= h(g^{-1}). \end{aligned}}$$

Questa procedura sembra una tautologia, ma
- Un gruppo G è una varietà su cui è difficile fare calcoli, mentre H è uno spazio vettoriale!
- L'algebra H contiene le informazioni sulle rappresentazioni del gruppo.
- Non tutti i gruppi possono essere rappresentati da una tale algebra, per es. i gruppi proiettivi, il gruppo di Heisenberg, quello dei diffeomorfismi non formali.

Esempio per un gruppo di matrici

Per $\quad SL_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; ad - bc = 1 \right\}$ $\quad$ le funzioni coordinate sono

$$x_{11}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a, \quad x_{12}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b, \quad x_{21}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c, \quad x_{22}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = d,$$

quindi l'algebra da considerare è

$$H = \mathbb{K}[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \mid x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = 1]$$

con

$$\Delta(x_{11}) = x_{11} \otimes x_{11} + x_{12} \otimes x_{21}, \qquad \Delta(x_{12}) = x_{11} \otimes x_{12} + x_{12} \otimes x_{22}, \qquad \text{etc}$$

in modo che

$$\begin{aligned} \Delta(x_{11}) \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) &= x_{11}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x_{11}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + x_{12}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x_{21}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \\ &= a\,a' + b\,c' \\ &= x_{11}\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \\ &= x_{11}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Algebra di Hopf di Faà di Bruno

Def. Algebra di Hopf di Faà di Bruno [Dublinet 1974, Joni-Rota 1979]:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
H_{\mathrm{FdB}} &= \mathbb{K}[x_n \mid n \geqslant 1] \qquad\qquad (x_0 = 1) \\
\Delta_{\mathrm{FdB}}(x_n) &= \sum_{m=0}^{n} x_m \otimes \sum_{(p_i)} \frac{(m+1)!}{p_0!p_1!\cdots p_n!}\; x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n} \\
\varepsilon(x_n) &= \delta_{n,0} \\
S(x_n) &= \text{per ricorrenza o formula Lagrange}
\end{aligned}
}
$$

$$p_0+\cdots+p_n = m+1$$
$$p_1+2p_2+\cdots+np_n = n-m$$

Prop. 1) $H_{\mathrm{FdB}} =$ algebra delle **coordinate** $x_n : \mathrm{Diff}(A) \to A,\ f \mapsto x_n(f) = f_n$

2) $\mathrm{Diff}(A) \cong \mathrm{Hom}_{Com_{\mathbb{K}}}(H_{\mathrm{FdB}}, A)$

Algebra di Hopf di Faà di Bruno

Def. Algebra di Hopf di Faà di Bruno [Dublinet 1974, Joni-Rota 1979]:

$$\boxed{\begin{aligned} H_{\mathrm{FdB}} &= \mathbb{K}[x_n \mid n \geqslant 1] \qquad\qquad (x_0 = 1) \\ \Delta_{\mathrm{FdB}}(x_n) &= \sum_{m=0}^{n} x_m \otimes \sum_{(p_i)} \frac{(m+1)!}{p_0!p_1!\cdots p_n!}\, x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n} \\ \varepsilon(x_n) &= \delta_{n,0} \\ S(x_n) &= \text{per ricorrenza o formula Lagrange} \end{aligned}}$$

$$p_0+\cdots+p_n = m+1$$
$$p_1+2p_2+\cdots+np_n = n-m$$

Prop. 1) H_{FdB} = algebra delle **coordinate** $x_n : \mathrm{Diff}(A) \to A,\ f \mapsto x_n(f) = f_n$

2) $\mathrm{Diff}(A) \cong \mathrm{Hom}_{Com_{\mathbb{K}}}(H_{\mathrm{FdB}}, A)$

La composizione di due diffeomorfismi formali f e g si ricostruisce così:

$$f_n = x_n(f) =: \langle x_n \mid f \rangle$$

$$\begin{aligned} (f\circ g)_n &= \langle x_n \mid f\circ g\rangle = \langle \Delta_{\mathrm{FdB}}(x_n) \mid f\otimes g\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{n} f_m \sum_{(p_i)} \frac{(m+1)!}{p_0!p_1!\cdots p_n!}\, g_1^{p_1}\cdots g_n^{p_n}. \end{aligned}$$

II - Feynman e i diffeografismi

Fotoni e elettroni virtuali, la fluttuazione del vuoto

1927 Dirac quantifica il campo elettromagnetico (*seconda quantificazione*), ma senza la relatività ristretta.

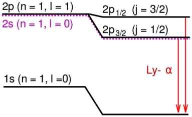
1932 Bohr elabora una teoria relativistica con Fermi, Fock, Oppenheimer etc., ma appaiono degli "infiniti"...

Fotoni e elettroni virtuali, la fluttuazione del vuoto

1927 Dirac quantifica il campo elettromagnetico (*seconda quantificazione*), ma senza la relatività ristretta.

1932 Bohr elabora una teoria relativistica con Fermi, Fock, Oppenheimer etc., ma appaiono degli "infiniti"...

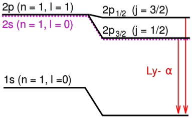
1947 Lamb e Retherford misurano la differenza d'energia degli orbitali $^2S_{1/2}$ e $^2P_{1/2}$ dell'atomo d'idrogeno (*Lamb shift*): inspiegabile!



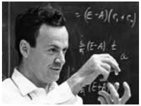
Fotoni e elettroni virtuali, la fluttuazione del vuoto


1927 Dirac quantifica il campo elettromagnetico (*seconda quantificazione*), ma senza la relatività ristretta.

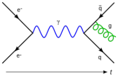
1932 Bohr elabora una teoria relativistica con Fermi, Fock, Oppenheimer etc., ma appaiono degli "infiniti"...



1947 Lamb e Retherford misurano la differenza d'energia degli orbitali $^2S_{1/2}$ e $^2P_{1/2}$ dell'atomo d'idrogeno (*Lamb shift*): inspiegabile!

1948 

Feynman calcola le correzioni perturbative (*path integrals* e *diagrammi di Feynman*).

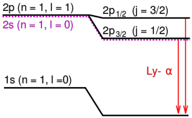


Tomonaga e Schwinger fondano la *teoria della rinormalizzazione*, che organizza le correzioni.

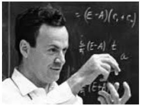

Fotoni e elettroni virtuali, la fluttuazione del vuoto

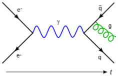

1927 Dirac quantifica il campo elettromagnetico (*seconda quantificazione*), ma senza la relatività ristretta.

1932 Bohr elabora una teoria relativistica con Fermi, Fock, Oppenheimer etc., ma appaiono degli “infiniti”...



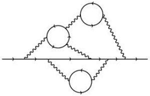
1947 Lamb e Retherford misurano la differenza d’energia degli orbitali $^2S_{1/2}$ e $^2P_{1/2}$ dell’atomo d’idrogeno (*Lamb shift*): inspiegabile!

1948  Feynman calcola le correzioni perturbative (*path integrals* e *diagrammi di Feynman*).



Tomonaga e Schwinger fondano la *teoria della rinormalizzazione*, che organizza le correzioni.


- Il Lamb shift si spiega con l’**emissione di fotoni e fermioni virtuali** (*fluttuazione* o *polarizzazione del vuoto*).
- Gli “infiniti” sono **diagrammi di Feynman divergenti**.



Quantum Field Theory, teoria perturbativa

- **QFT**: quantificazione di una *Lagrangiana classica*

$$\boxed{\mathcal{L}(\varphi; m, \lambda) = \mathcal{L}_0(\varphi; m) + \lambda\, \mathcal{L}_{int}(\varphi; m)}$$

dove: $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow E$ è un **campo** (sezione di un fibrato)
m è la **massa** della particella descritta da φ
λ è la **costante di accoppiamento** (carica elettrica, flavour, etc)

Esempio, teoria φ^3: $\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\, \partial^\mu\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{3!}\lambda\, \varphi^3$

Quantum Field Theory, teoria perturbativa

- **QFT**: quantificazione di una *Lagrangiana classica*

$$\boxed{\mathcal{L}(\varphi; m, \lambda) = \mathcal{L}_0(\varphi; m) + \lambda\, \mathcal{L}_{int}(\varphi; m)}$$

dove: $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow E$ è un **campo** (sezione di un fibrato)
m è la **massa** della particella descritta da φ
λ è la **costante di accoppiamento** (carica elettrica, flavour, etc)

Esempio, teoria φ^3: $\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!}\lambda\, \varphi^3$

- **Funzioni di correlazione**:

$$\boxed{\langle 0 | \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_k) | 0 \rangle = \sum_{E(\gamma)=k} I(\gamma; m, x_1, \ldots, x_k)\ \hbar^{L(\gamma)}\ \lambda^{V(\gamma)}}$$

dove: somma sui **diagrammi di Feynman** γ ammessi dalla teoria
integrale $I(\gamma)$ à partire dal **propagatore libero** $G_0(x, y)$ di $\mathcal{L}_0(\varphi; m)$

Quantum Field Theory, teoria perturbativa

- **QFT**: quantificazione di una *Lagrangiana classica*

$$\boxed{\mathcal{L}(\varphi; m, \lambda) = \mathcal{L}_0(\varphi; m) + \lambda\, \mathcal{L}_{int}(\varphi; m)}$$

dove: $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow E$ è un **campo** (sezione di un fibrato)
m è la **massa** della particella descritta da φ
λ è la **costante di accoppiamento** (carica elettrica, flavour, etc)

Esempio, teoria φ^3: $\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\, \partial^\mu\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{3!}\lambda\, \varphi^3$

- **Funzioni di correlazione**:

$$\boxed{\langle 0|\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_k)|0\rangle = \sum_{E(\gamma)=k} I(\gamma; m, x_1, \dots, x_k)\ \hbar^{L(\gamma)}\ \lambda^{V(\gamma)}}$$

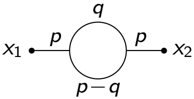
dove: somma sui **diagrammi di Feynman** γ ammessi dalla teoria
integrale $I(\gamma)$ à partire dal **propagatore libero** $G_0(x, y)$ di $\mathcal{L}_0(\varphi; m)$

- **Serie asintotica in** λ: coefficienti in $A[\hbar]$, A dipende dalla teoria

$$G_n := \sum_{V(\gamma)=n} I(\gamma)\ \hbar^{L(\gamma)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{G(\lambda) = \sum_{n\geqslant 0} G_n\ \lambda^n}$$

Quantum Field Theory, teoria da rinormalizzare

- **Grafi e sottografi divergenti**:



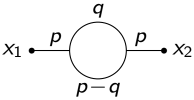
$$= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \; \frac{1}{q^2 + m^2} \; \frac{1}{(p-q)^2 + m^2}$$

$$\simeq \int_{|q|_{min}}^{\infty} d|q| \; \frac{1}{|q|} = \infty \;!$$

vanno *rinormalizzati* $\Longrightarrow$ **controtermine** $C(\gamma) = -$ parte divergente.

Quantum Field Theory, teoria da rinormalizzare

- **Grafi e sottografi divergenti**:



$$= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \, \frac{1}{q^2 + m^2} \, \frac{1}{(p-q)^2 + m^2}$$

$$\simeq \int_{|q|_{min}}^{\infty} d|q| \, \frac{1}{|q|} = \infty \, !$$

vanno *rinormalizzati* $\implies$ **controtermine** $C(\gamma) = -$ parte divergente.

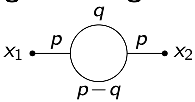
- **Formula di Dyson** [1949]: $\boxed{G^{ren}(\lambda) = C(\lambda) \; G(\lambda_0(\lambda))}$

dove: $C(\lambda) = 1 + O(\lambda)$ è una **serie invertibile**
$\lambda_0(\lambda) = \lambda + O(\lambda^2)$ è un **diffeomorfismo formale**

con coefficienti dati dai controtermini, in un'algebra $A_\varepsilon[\hbar]$ *regolarizzata*.

Quantum Field Theory, teoria da rinormalizzare

- **Grafi e sottografi divergenti**:



$$= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \; \frac{1}{q^2 + m^2} \; \frac{1}{(p-q)^2 + m^2}$$

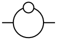
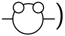
$$\simeq \int_{|q|_{min}}^{\infty} d|q| \; \frac{1}{|q|} = \infty \; !$$

vanno *rinormalizzati* $\Longrightarrow$ **controtermine** $C(\gamma) = -$ parte divergente.

- **Formula di Dyson** [1949]: $\boxed{G^{ren}(\lambda) = C(\lambda) \; G(\lambda_0(\lambda))}$

dove: $C(\lambda) = 1 + O(\lambda)$ è una **serie invertibile**
$\lambda_0(\lambda) = \lambda + O(\lambda^2)$ è un **diffeomorfismo formale**

con coefficienti dati dai controtermini, in un'algebra $A_\varepsilon[\hbar]$ *regolarizzata*.

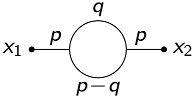
- **Formula BPHZ** [1957–'69]: ricorrenza sui sottografi div. (es.  )

$$\boxed{\begin{aligned} C(\gamma) &= -\text{Taylor}^{div(\gamma)}[R(\gamma)] \\ R(\gamma) &= I(\gamma) + C(\gamma) + \sum_{(\gamma_i)} R(\gamma_{/(\gamma_i)}) \; C(\gamma_1) \cdots C(\gamma_r) \end{aligned}}$$

$\gamma_1, \ldots, \gamma_r \subset \gamma$
1PI disgiunti

Quantum Field Theory, teoria da rinormalizzare

- **Grafi e sottografi divergenti**:



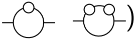
$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{q^2+m^2}\ \frac{1}{(p-q)^2+m^2}$$
$$\simeq \int_{|q|_{min}}^{\infty} d|q|\ \frac{1}{|q|} = \infty\ !$$

vanno *rinormalizzati* $\implies$ **controtermine** $C(\gamma) = -$ parte divergente.

- **Formula di Dyson** [1949]: $\boxed{G^{ren}(\lambda) = C(\lambda)\ G(\lambda_0(\lambda))}$

dove: $C(\lambda) = 1 + O(\lambda)$ è una **serie invertibile**
$\lambda_0(\lambda) = \lambda + O(\lambda^2)$ è un **diffeomorfismo formale**

con coefficienti dati dai controtermini, in un'algebra $A_\varepsilon[\hbar]$ *regolarizzata*.

- **Formula BPHZ** [1957–'69]: ricorrenza sui sottografi div. (es. )

$$\boxed{\begin{aligned} C(\gamma) &= -\mathrm{Taylor}^{div(\gamma)}[R(\gamma)] \\ R(\gamma) &= I(\gamma) + C(\gamma) + \sum_{(\gamma_i)} R(\gamma_{/(\gamma_i)})\ C(\gamma_1)\cdots C(\gamma_r) \end{aligned}}$$

$\gamma_1, \ldots, \gamma_r \subset \gamma$
1PI disgiunti

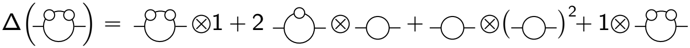
Dyson: composizione di diffeo $\leftrightarrow$ Faà di Bruno. Che significa BPHZ?

Algebra di Connes-Kreimer e gruppo dei diffeografismi

Def. Algebra di Hopf sui grafi di Feynman [Connes-Kreimer 2000]:

$$\boxed{\begin{aligned} H_{\mathrm{CK}} &= \mathbb{C}[\text{1PI } \gamma\text{'s}] \\ \Delta_{\mathrm{CK}}(\gamma) &= \gamma \otimes 1 + 1 \otimes \gamma + \sum_{(\gamma_i)} \gamma_{/(\gamma_i)} \otimes \gamma_1 \cdots \gamma_r \\ \varepsilon(\gamma) &= \delta_{\gamma,1} \\ S(\gamma) &= \text{per ricorrenza} \end{aligned}}$$

$\gamma_1, \ldots, \gamma_r \subset \gamma$
1PI disgiunti

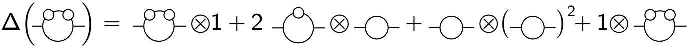
Esempio: 

Algebra di Connes-Kreimer e gruppo dei diffeografismi

Def. Algebra di Hopf sui grafi di Feynman [Connes-Kreimer 2000]:

$$\boxed{\begin{aligned} H_{\mathrm{CK}} &= \mathbb{C}[\text{1PI } \gamma\text{'s}] \\ \Delta_{\mathrm{CK}}(\gamma) &= \gamma \otimes 1 + 1 \otimes \gamma + \sum_{(\gamma_i)} \gamma_{/(\gamma_i)} \otimes \gamma_1 \cdots \gamma_r \\ \varepsilon(\gamma) &= \delta_{\gamma,1} \\ S(\gamma) &= \text{per ricorrenza} \end{aligned}}$$


$\gamma_1, \ldots, \gamma_r \subset \gamma$
1PI disgiunti

Esempio: 

Def. Gruppo dei diffeografismi [Connes-Kreimer 2000]: A alg. ass. e comm.

$$\boxed{\begin{aligned} G_{\mathrm{CK}}(A) &:= \mathrm{Hom}_{Com_{\mathbb{K}}}(H_{\mathrm{CK}}, A) = \Big\{ F(t) = \sum_{\gamma} F_\gamma \ t^\gamma \ \Big| \ F_\gamma \in A \Big\} \\ (F * G)(t) &= \sum_{\gamma} \Big(F_\gamma + G_\gamma + \sum_{(\gamma_i)} F_{\gamma_{/(\gamma_i)}} \ G_{\gamma_1} \cdots G_{\gamma_r} \Big) \ t^\gamma \end{aligned}}$$

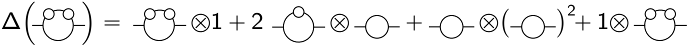
"t^γ" simbolo

Algebra di Connes-Kreimer e gruppo dei diffeografismi

Def. **Algebra di Hopf sui grafi di Feynman** [Connes-Kreimer 2000]:

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{CK}} &= \mathbb{C}[\text{1PI } \gamma\text{'s}] \\
\Delta_{\mathrm{CK}}(\gamma) &= \gamma \otimes 1 + 1 \otimes \gamma + \sum_{(\gamma_i)} \gamma_{/(\gamma_i)} \otimes \gamma_1 \cdots \gamma_r \\
\varepsilon(\gamma) &= \delta_{\gamma,1} \\
S(\gamma) &= \text{per ricorrenza}
\end{aligned}
$$

$\gamma_1, \ldots, \gamma_r \subset \gamma$
1PI disgiunti

Esempio: 

Def. **Gruppo dei diffeografismi** [Connes-Kreimer 2000]: A alg. ass. e comm.

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{CK}}(A) &:= \mathrm{Hom}_{Com_{\mathbb{K}}}(H_{\mathrm{CK}}, A) = \Big\{ F(t) = \sum_{\gamma} F_\gamma \; t^\gamma \;\Big|\; F_\gamma \in A \Big\} \\
(F * G)(t) &= \sum_{\gamma} \Big(F_\gamma + G_\gamma + \sum_{(\gamma_i)} F_{\gamma/(\gamma_i)} \; G_{\gamma_1} \cdots G_{\gamma_r} \Big) \; t^\gamma
\end{aligned}
$$

"t^γ"
<u>simbolo</u>

Teor. **Feynman estende Faà di Bruno** [Connes-Kreimer 2001]:

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{FdB}} &\hookrightarrow H_{\mathrm{CK}} \\
x_n &\mapsto X_n = \sum_{V(\gamma)=2n} \gamma
\end{aligned}
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{CK}}(A) &\twoheadrightarrow \mathrm{Diff}(A) \\
F(t) &\mapsto f(t) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{V(\gamma)=n} F_\gamma \; t^{n+1}
\end{aligned}
$$

III - Gruppi proalgebrici con coefficienti non commutativi

Il mondo dei coefficienti non commutativi

Fisica: per i **fermioni** e le **teorie di gauge**, le serie hanno coefficienti in un'algebra A non commutativa, per es. $M_4(\mathbb{C})$ in QED [Brouder-F 2001] o i tensori $T(E)$ [Brouder-Schmitt 2002, Herscovich 2017].
L'algebra di Hopf comm. usuale non rispetta A [Van Suijlekom 2007].

Il mondo dei coefficienti non commutativi

Fisica: per i **fermioni** e le **teorie di gauge**, le serie hanno coefficienti in un'algebra A non commutativa, per es. $M_4(\mathbb{C})$ in QED [Brouder-F 2001] o i tensori $T(E)$ [Brouder-Schmitt 2002, Herscovich 2017].
L'algebra di Hopf comm. usuale non rispetta A [Van Suijlekom 2007].

Algebra: esistono altre **algebre di Hopf della rinormalizzazione** oltre a quelle di Faà di Bruno e Connes-Kreimer, tutte di polinomi su **alberi con radici** [Kreimer 1997, Foissy 2001], **alberi binari** [Brouder-F 2001], **tensori simmetrici** [Brouder-Schmitt 2002].
Tutte hanno una versione **non commutativa** (su alberi planari, tensori).

Il mondo dei coefficienti non commutativi

Fisica: per i **fermioni** e le **teorie di gauge**, le serie hanno coefficienti in un'algebra A non commutativa, per es. $M_4(\mathbb{C})$ in QED [Brouder-F 2001] o i tensori $T(E)$ [Brouder-Schmitt 2002, Herscovich 2017].
L'algebra di Hopf comm. usuale non rispetta A [Van Suijlekom 2007].

Algebra: esistono altre **algebre di Hopf della rinormalizzazione** oltre a quelle di Faà di Bruno e Connes-Kreimer, tutte di polinomi su **alberi con radici** [Kreimer 1997, Foissy 2001], **alberi binari** [Brouder-F 2001], **tensori simmetrici** [Brouder-Schmitt 2002].
Tutte hanno una versione **non commutativa** (su alberi planari, tensori).

Algebra di Hopf FdB non-commutativa [Brouder-F-Krattenthaler 2006]:

$$\boxed{\begin{aligned} H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}} &= \mathbb{K}\langle x_1, x_2, ...\rangle \qquad (x_0 = 1) \\ \Delta^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}}(x_n) &= \sum_{m=0}^{n} x_m \otimes \sum_{(k)} x_{k_0} \cdots x_{k_m} \end{aligned}}$$


$k_0+k_1+\cdots+k_m = n-m$

Il mondo dei coefficienti non commutativi

Fisica: per i **fermioni** e le **teorie di gauge**, le serie hanno coefficienti in un'algebra A non commutativa, per es. $M_4(\mathbb{C})$ in QED [Brouder-F 2001] o i tensori $T(E)$ [Brouder-Schmitt 2002, Herscovich 2017].
L'algebra di Hopf comm. usuale non rispetta A [Van Suijlekom 2007].

Algebra: esistono altre **algebre di Hopf della rinormalizzazione** oltre a quelle di Faà di Bruno e Connes-Kreimer, tutte di polinomi su **alberi con radici** [Kreimer 1997, Foissy 2001], **alberi binari** [Brouder-F 2001], **tensori simmetrici** [Brouder-Schmitt 2002].
Tutte hanno una versione **non commutativa** (su alberi planari, tensori).

Algebra di Hopf FdB non-commutativa [Brouder-F-Krattenthaler 2006]:

$$\boxed{\begin{aligned} H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}} &= \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \dots\rangle \qquad (x_0 = 1) \\ \Delta^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}}(x_n) &= \sum_{m=0}^{n} x_m \otimes \sum_{(k)} x_{k_0} \cdots x_{k_m} \end{aligned}}$$


$k_0+k_1+\cdots+k_m = n-m$

Gruppi? se H e A sono algebre non commutative, la convoluzione

$$\alpha * \beta = m_A\ (\alpha \otimes \beta)\ \Delta_H \qquad \text{in} \qquad \mathrm{Hom}_{As_{\mathbb{K}}}(H, A)$$

non è ben definita perché m_A non è un morfismo di algebre!

Gruppi di convoluzione su algebre non commutative

Idea: rimpiazzare l'algebra tensoriale $A \otimes B$, dove $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$
con l'algebra **prodotto libero** $A \amalg B$, dove $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = a \otimes b \otimes a' \otimes b'$.
Allora m_A induce un morfismo di algebre $\widehat{m}_A \colon A \amalg A \to A$.

Gruppi di convoluzione su algebre non commutative

Idea: rimpiazzare l'algebra tensoriale $A \otimes B$, dove $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$
con l'algebra **prodotto libero** $A \amalg B$, dove $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = a \otimes b \otimes a' \otimes b'$.
Allora m_A induce un morfismo di algebre $\widehat{m}_A : A \amalg A \to A$.

Def. Cogruppo in As [Kan 1958, Eckman-Hilton 1962, Berstein 1965]:

algebra H con

comoltiplicazione	$\Delta^{\amalg} : H \to H \amalg H$	coassociativa
counità	$\varepsilon : H \to \mathbb{K}$	+ prop
antipodo	$S : H \to H$	+ prop

$\Rightarrow$ Si ottiene un **gruppo (pro)algebrico su algebre non-commutative**

$$\boxed{G(A) := \mathrm{Hom}_{As_{\mathbb{K}}}(H, A)} \quad \text{con} \quad \boxed{\alpha * \beta = \widehat{m}_A \ (\alpha \amalg \beta) \ \Delta^{\amalg}_H}$$

Gruppi di convoluzione su algebre non commutative

Idea: rimpiazzare l'algebra tensoriale $A \otimes B$, dove $(a \otimes b)\cdot(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$
con l'algebra **prodotto libero** $A \amalg B$, dove $(a \otimes b)\cdot(a' \otimes b') = a \otimes b \otimes a' \otimes b'$.
Allora m_A induce un morfismo di algebre $\widehat{m}_A : A \amalg A \to A$.

Def. Cogruppo in As [Kan 1958, Eckman-Hilton 1962, Berstein 1965]:

algebra H con

$$\boxed{\begin{array}{rll} \text{comoltiplicazione} & \Delta^{\amalg} : H \to H \amalg H & \text{coassociativa} \\ \text{counità} & \varepsilon : H \to \mathbb{K} & + \text{ prop} \\ \text{antipodo} & S : H \to H & + \text{ prop} \end{array}}$$

$\Rightarrow$ Si ottiene un **gruppo (pro)algebrico su algebre non-commutative**

$$\boxed{G(A) := \mathrm{Hom}_{As_{\mathbb{K}}}(H, A)} \quad \text{con} \quad \boxed{\alpha * \beta = \widehat{m}_A \ (\alpha \amalg \beta) \ \Delta_H^{\amalg}}$$

Prop. $\pi : H \amalg H \twoheadrightarrow H \otimes H$ è morfismo di algebre $\Rightarrow H$ è **Hopf** con $\boxed{\Delta_H := \pi \ \Delta_H^{\amalg}}$.

Es. Gruppo delle serie invertibili [Brouder-F-Krattenthaler 2006]:

$$\boxed{G(A) = \left\{ a(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \right\}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} H = \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle \\ \Delta^{\amalg}(x_n) = \sum x_m \otimes x_{n-m} \end{array}}$$

Teor. I cogruppi sono algebre libere! [Berstein 1965, Zhang 1991, Fresse 1996]
$\Rightarrow$ Solo i gruppi di matrici unitarie possono avere un cogruppo! Ok per QFT.

Ancora un problema con i diffeomorfismi!

- Se A è un'algebra **non commutativa**, l'insieme

$$\mathrm{Diff}(A) = \Big\{ a(t) = t + a_1\, t^2 + a_2\, t^3 + \cdots \ \big|\ a_n \in A \Big\}$$

non è un gruppo perché la composizione non è associativa:

$$\big(a\circ(b\circ c) - (a\circ b)\circ c\big)(t) = (a_1 b_1 c_1 - a_1 c_1 b_1)\ t^4 + O(t^5) \neq 0.$$

Ancora un problema con i diffeomorfismi!

- Se A è un'algebra **non commutativa**, l'insieme

$$\mathrm{Diff}(A) = \Big\{ a(t) = t + a_1\, t^2 + a_2\, t^3 + \cdots \;\Big|\; a_n \in A \Big\}$$

non è un gruppo perché la composizione non è associativa:

$$\big(a\circ(b\circ c) - (a\circ b)\circ c\big)(t) = (a_1 b_1 c_1 - a_1 c_1 b_1)\; t^4 + O(t^5) \neq 0.$$

- Eppure il coprodotto $\Delta^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}}$ può essere visto come un morfismo di algebre

$$\Delta^{\amalg}_{\mathrm{FdB}} : H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}} \longrightarrow H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}} \amalg H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}}$$

che **rappresenta** Diff su $As_{\mathbb{K}}$ e naturalmente **non è coassociativito!**

IV - Loop dei diffeomorfismi formali

Loops

Def. Un **loop** [Moufang 1935] è un insieme Q munito di

- prodotto (non nec. associativo) $a \cdot b$
- unità 1
- divisione a destra a/b e a sinistra $a\backslash b$.

Loops

Def. Un **loop** [Moufang 1935] è un insieme Q munito di

- prodotto (non nec. associativo) $a \cdot b$
- unità 1
- divisione a destra a/b e a sinistra $a\backslash b$.

Prop. Ogni gruppo è un loop associativo, in cui $a\backslash 1 = 1/a =: a^{-1}$ e

$$a/b = a \cdot b^{-1} \qquad \text{e} \qquad a\backslash b = a^{-1} \cdot b.$$

Es. Il **più piccolo loop** che non è un gruppo è $\mathbb{S}^7 = \{\text{ottonioni unitari}\}$.

Loops

Def. Un **loop** [Moufang 1935] è un insieme Q munito di

- prodotto (non nec. associativo) $a \cdot b$
- unità 1
- divisione a destra a/b e a sinistra $a\backslash b$.

Prop. Ogni gruppo è un loop associativo, in cui $a\backslash 1 = 1/a =: a^{-1}$ e

$$a/b = a \cdot b^{-1} \qquad \text{e} \qquad a\backslash b = a^{-1} \cdot b.$$

Es. Il **più piccolo loop** che non è un gruppo è $\mathbb{S}^7 = \{\text{ottonioni unitari}\}$.

Teor. Ogni spazio omogeneo è un loop (locale) con la struttura residua dell'azione di gruppo. [Sabinin 1972]

Teor. Ogni varietà con connessione piatta è un loop (locale) ("geodetico").
[Sabinin 1981, 1986, 1977]
(Estensione di un risultato di E. Cartan [1904, 1927] sui gruppi di Lie.)

Loops di convoluzione su algebre non commutative

Def. Coloop in As [F-Shestakov 2017]: algebra H con

$$\boxed{\begin{array}{rll} \text{comoltiplicazione} & \Delta^{\amalg} : H \to H \amalg H & \text{(non coass.)} \\ \text{counità} & \varepsilon : H \to \mathbb{K} & + \text{prop} \\ \text{divisione destra} & \delta_r : H \to H \amalg H & + \text{prop} \\ \text{divisione sinistra} & \delta_l : H \to H \amalg H & + \text{prop} \end{array}}$$

Prop. Si ottiene un **loop (pro)algebrico su algebre non-commutative**

$$\boxed{Q(A) := \mathrm{Hom}_{As_{\mathbb{K}}}(H, A)} \qquad \text{con} \qquad \boxed{\alpha * \beta = \widehat{m}_A \ (\alpha \amalg \beta) \ \Delta^{\amalg}_H}$$

Loops di convoluzione su algebre non commutative

Def. Coloop in As [F-Shestakov 2017]: algebra H con

comoltiplicazione	$\Delta^{\amalg} : H \to H \amalg H$	(non coass.)
counità	$\varepsilon : H \to \mathbb{K}$	+ prop
divisione destra	$\delta_r : H \to H \amalg H$	+ prop
divisione sinistra	$\delta_l : H \to H \amalg H$	+ prop

Prop. Si ottiene un **loop (pro)algebrico su algebre non-commutative**

$$\boxed{Q(A) := \mathrm{Hom}_{As_{\mathbb{K}}}(H, A)} \quad \text{con} \quad \boxed{\alpha * \beta = \widehat{m}_A \ (\alpha \amalg \beta) \ \Delta^{\amalg}_H}$$

Es. Loop dei diffeomorfismi formali: A algebra associativa (non comm.)

$$\boxed{\mathrm{Diff}(A)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} H = \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle \\ \Delta^{\amalg}(x_n) = \Delta^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}}(x_n) \\ \delta_r(x_n) = \text{estensione immediata di Lagrange} \\ \delta_l(x_n) = \text{nuova formula} \end{array}}$$

Prova che il prodotto libero $\amalg$ è necessario

Nel loop $\mathrm{Diff}(A)$, si ha $\quad 1/a = a\backslash 1 =: a^{-1} \quad$ e anche $\quad a/b = a \circ b^{-1} \quad$ ma

$$a\backslash b \neq a^{-1} \circ b \ !$$

Prova che il prodotto libero $\amalg$ è necessario

Nel loop $\mathrm{Diff}(A)$, si ha $\quad 1/a = a\backslash 1 =: a^{-1} \quad$ e anche $\quad a/b = a \circ b^{-1} \quad$ ma

$$a\backslash b \neq a^{-1} \circ b \ !$$

Nella serie $a\backslash b$, il coefficiente

$$\begin{aligned}(a\backslash b)_3 = b_3 &- \big(2a_1 b_2 + a_1 b_1^2\big) + \big(5a_1^2 b_1 + a_1 b_1 a_1 - 3a_2 b_1\big) \\ &- \big(5a_1^3 - 2a_1 a_2 - 3a_2 a_1 + a_3\big)\end{aligned}$$

contiene il termine $\boxed{a_1 b_1 a_1}$ che non può essere presentato nella forma

$$f(a) \otimes g(b) \in H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}} \otimes H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}},$$

mentre chiaramente appartiene a

$$H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}} \amalg H^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{FdB}}.$$

Questo **giustifica la necessità di rimpiazzare** $\otimes$ **con** $\amalg$ nel coprodotto!

GRAZIE!

Loops, spazi omogenei e connessioni piatte

- **Ogni spazio omogeneo è un loop (locale) con la struttura residua dell'azione di gruppo.** [Sabinin 1972]
  Cioè, se $M = G/H$ è uno spazio omogeneo con $p : G \to M$ e se $i : U \subset M \longrightarrow G$ è una sezione (locale) attorno a $e \in M$, il prodotto
  $$x \cdot y = p(i(x)i(y)), \qquad x, y \in M$$
  definisce un loop (locale) su $M = G/H$. Vale anche il viceversa.

- **Ogni varietà con connessione piatta è un loop (locale)** ("geodetico").
  [Sabinin 1981, 1986, 1977]

1) Se Q è un loop liscio, si definisce un **trasporto parallelo** $\quad P_a^b : T_a Q \to T_b Q$
   come il differenziale della mappa $\quad x \mapsto b \cdot (a \backslash x)$.
   Il fibrato tangente è allora trivializzato e si ha una connessione piatta ∇.

   N.B. Per i gruppi di Lie, questo è un risultato di Élie Cartan [1904, 1927],
   e in più la torsione ha derivata covariante nulla!

2) Se M è una varietà liscia con connessione piatta ∇, attorno ad ogni punto $e \in M$ si può definire un loop (locale)
   $$a \bullet_e b = \exp_a \left(P_e^a(log_e(b)) \right).$$
   In più, è **alternativo a destra**: $\quad (a \bullet b^p) \bullet b^q = a \bullet b^{p+q}$.

3) Se Q è alternativo a destra, si ha $\cdot = \bullet$, altrimenti $a \cdot b = a \bullet \Phi(a, b)$.