Da Faà di Bruno a Feynman, e oltre

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan e Dipartemento di Matematica
Università Lyon 1, Francia

frabetti@math.univ-lyon1.fr

In un articolo di due pagine del 1855, Francesco Faà di Bruno descrive lo sviluppo di Taylor di una funzione composta $f(g(t))$, con una formula oggi intitolata alla sua memoria. Assieme alla celebre formula d'inversione di Giuseppe Luigi Lagrange del 1770, questa legge definisce il gruppo delle funzioni analitiche biettive, o più generalmente il gruppo delle serie formali che hanno la reciproca, i *diffeomorfismi formali*.

Ovviamente, la composizione di serie formali trova una quantità impressionante di applicazioni che spaziano dall'algebra e la combinatorica alla geometria, l'analisi numerica e le teorie perturbative in analisi e in probabilità, fino alla teoria quantistica dei campi in fisica.

Nel mio intervento, presenterò il ruolo della formula di Faà di Bruno nella rinormalizzazione delle funzioni di Green in teoria quantistica dei campi, e tre generalizzazioni motivate dalla fisica.

In primo luogo, la generalizzazione alle serie sviluppate su oggetti di natura combinatorica come i diagrammi di Feynman (i *diffeografismi* di Alain Connes) o altri grafi [Connes-Kreimer], e altre varianti sugli alberi binari o in termini di algebre di Hopf non-commutative [Brouder-F, Foissy].

In secondo luogo, l'interpretazione di alcuni gruppi di serie formali come varietà con coordinate non-commutative (un po' come i gruppi quantistici, ma in questo caso l'oggetto geometrico è un vero gruppo) [Eckman-Hilton, Berstein, Fresse, Brouder-F-Krattenthaler].

Infine, la generalizzazione del gruppo stesso al *loop* dei diffeomorfismi formali, un insieme dotato di un prodotto che ammette l'unità e le divisioni, ma che non è associativo [Sabinin-Mikheev, Perez–Izquierdo, F-Shestakov].

F. Faà di Bruno, *Sullo sviluppo delle funzioni*, Ann. Sci. Mat. Fis., Roma **6** (1855), 479–480.

J. L. Lagrange, *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries*, Mém. Aca d. Royale Sci. et des Belles-Lettres de Berlin **24** (1770), 251–326.

A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem. I and II.* Comm. Math. Phys. **210** (2000), 249–273; **216** (2001), 215–241.

C. Brouder, A. Frabetti, *Renormalization of QED with planar binary trees*, Eur. Phys. J. C **19** (2001), 715–741.

L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés. I. II.* Bull. Sci. Math., **126 (3)** 2002, 193–239; **126 (4)** 2002, 249–288.

C. Brouder, A. Frabetti, *QED Hopf algebras on planar binary trees*, J. Alg. **267** (2003), 298–322.

B. Eckman, P. J. Hilton, *Group-like structures in general categories I, II, III*, Math. Ann. **143** (1962), 227–255; **151** (1963), 150–186; **150** (1963), 165–187.

I. Berstein, *On co-groups in the category of associative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 257–269.

B. Fresse, *Cogroups in algebras over an operad are free algebras*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), 637–676.

C. Brouder, A. Frabetti, C. Krattenthaler, *Non-commutative Hopf algebra of formal diffeomorphisms*, Adv. Math. **200** (2006), 479–524.

L. V. Sabinin, P. O. Mikheev, *On the infinitesimal theory of local analytic loops*, Sov. Math. Dokl. **36** (1988), 545–548.

J. M. Pérez-Izquierdo, *Algebras, hyperalgebras, nonassociative bialgebras and loops*, Adv. Math. **208** (2007), 834–876.

A. Frabetti, I. P. Shestakov, *Loop of formal diffeomorphisms*, preprint 2017.