

# Una presentazione intuitiva della formula di Faà di Bruno

A. Mennucci <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Scuola Normale Superiore, Pisa,



Convegno  
*L'eredità matematica e civile di Francesco Faà di Bruno*  
Politecnico di Torino  
22 settembre 2017



## Introduzione

### Forma combinatoria

- 2.1 Esempio per spiegare la forma combinatoria
- 2.2 Dimostrazione della formula combinatoria

### Forme fattoriali

- 3.1 Prima forma fattoriale
- 3.2 Seconda forma fattoriale

## Note finali

**Introduzione**

Forma combinatoria

Forme fattoriali

Note finali

Supponiamo che  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  siano funzioni che ammettono  $n$  derivate: la formula di Faà di Bruno elenca i termini dell'espansione della derivata  $n$ -esima

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = (f \circ g)^{(n)}(x) .$$

(A sinistra abbiamo usato la notazione di Leibniz per le derivate, a destra la notazione di Lagrange — useremo principalmente quest'ultima).

Supponiamo che  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  siano funzioni che ammettono  $n$  derivate: la formula di Faà di Bruno elenca i termini dell'espansione della derivata  $n$ -esima

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = (f \circ g)^{(n)}(x) .$$

(A sinistra abbiamo usato la notazione di Leibniz per le derivate, a destra la notazione di Lagrange — useremo principalmente quest'ultima).

Per calcolare queste derivate si usano due formule antecedenti già note nel calcolo.

- Una è la *regola della catena* per la derivata di una funzione composta

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x) .$$

Come si vede, questa genera un “monomio” che è il prodotto di due funzioni.

- L'altra è la *regola del prodotto* per la derivata del prodotto di funzioni, che presentiamo nel caso di tre funzioni derivabili  $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\frac{d}{dx} (a(x)b(x)c(x)) = a'(x)b(x)c(x) + a(x)b'(x)c(x) + a(x)b(x)c'(x) .$$

Come si vede, questa genera una somma di “monomi”, e in ciascuno si deriva uno dei fattori del prodotto dato.

(Entrambe le formule compaiono nei lavori di Leibniz, circa 1680).

Per calcolare la derivata n-esima sarà necessario applicare le precedenti regole più e più volte. Si può immaginare che questo darà luogo a espressioni molto lunghe e complesse, in quanto la prima regola aumenta il numero dei fattori nei monomi e la seconda aumenta il numero di monomi nella somma.



Per calcolare queste derivate si usano due formule antecedenti già note nel calcolo.

- Una è la *regola della catena* per la derivata di una funzione composta

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x) .$$

Come si vede, questa genera un “monomio” che è il prodotto di due funzioni.

- L'altra è la *regola del prodotto* per la derivata del prodotto di funzioni, che presentiamo nel caso di tre funzioni derivabili  $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\frac{d}{dx} (a(x)b(x)c(x)) = a'(x)b(x)c(x) + a(x)b'(x)c(x) + a(x)b(x)c'(x) .$$

Come si vede, questa genera una somma di “monomi”, e in ciascuno si deriva uno dei fattori del prodotto dato.

(Entrambe le formule compaiono nei lavori di Leibniz, circa 1680).

Per calcolare la derivata n-esima sarà necessario applicare le precedenti regole più e più volte. Si può immaginare che questo darà luogo a espressioni molto lunghe e complesse, in quanto la prima regola aumenta il numero dei fattori nei monomi e la seconda aumenta il numero di monomi nella somma.



Per calcolare queste derivate si usano due formule antecedenti già note nel calcolo.

- Una è la *regola della catena* per la derivata di una funzione composta

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x) .$$

Come si vede, questa genera un “monomio” che è il prodotto di due funzioni.

- L'altra è la *regola del prodotto* per la derivata del prodotto di funzioni, che presentiamo nel caso di tre funzioni derivabili  $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\frac{d}{dx} (a(x)b(x)c(x)) = a'(x)b(x)c(x) + a(x)b'(x)c(x) + a(x)b(x)c'(x) .$$

Come si vede, questa genera una somma di “monomi”, e in ciascuno si deriva uno dei fattori del prodotto dato.

(Entrambe le formule compaiono nei lavori di Leibniz, circa 1680).

Per calcolare la derivata n-esima sarà necessario applicare le precedenti regole più e più volte. Si può immaginare che questo darà luogo a espressioni molto lunghe e complesse, in quanto la prima regola aumenta il numero dei fattori nei monomi e la seconda aumenta il numero di monomi nella somma. »







Casi  $n = 1, 2, 3$ 

Iniziamo con un esempio. Calcoliamo le derivate per  $n = 1, 2, 3$ . La derivata prima è una diretta applicazione della regola della catena.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad .$$

La derivata seconda si ottiene applicando la regola del prodotto e poi la derivata a catena.

$$\begin{aligned} (f \circ g)''(x) &= \left( f'(g(x))g'(x) \right)' = \\ &\stackrel{\text{prodotto}}{=} \left( f'(g(x)) \right)' g'(x) + f'(g(x))g''(x) = \\ &\stackrel{\text{catena}}{=} f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \quad . \end{aligned}$$

Casi  $n = 1, 2, 3$ 

Iniziamo con un esempio. Calcoliamo le derivate per  $n = 1, 2, 3$ . La derivata prima è una diretta applicazione della regola della catena.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad .$$

La derivata seconda si ottiene applicando la regola del prodotto e poi la derivata a catena.

$$\begin{aligned} (f \circ g)''(x) &= \left( f'(g(x))g'(x) \right)' = \\ &\stackrel{\text{prodotto}}{=} \left( f'(g(x)) \right)' g'(x) + f'(g(x))g''(x) = \\ &\stackrel{\text{catena}}{=} f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \quad . \end{aligned}$$

Casi  $n = 1, 2, 3$ 

Iniziamo con un esempio. Calcoliamo le derivate per  $n = 1, 2, 3$ . La derivata prima è una diretta applicazione della regola della catena.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad .$$

La derivata seconda si ottiene applicando la regola del prodotto e poi la derivata a catena.

$$\begin{aligned} (f \circ g)''(x) &= \left( f'(g(x))g'(x) \right)' = \\ &\stackrel{\text{prodotto}}{=} \left( f'(g(x)) \right)' g'(x) + f'(g(x))g''(x) = \\ &\stackrel{\text{catena}}{=} f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \quad . \end{aligned}$$

Vediamo nel dettaglio il passaggio dalla derivata seconda alla terza. Deriviamo un'altra volta la seconda derivata

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \quad .$$

$$\begin{array}{l}
 (f \circ g)'''(x) = \left( f''(g(x))g'(x)^2 \right)' + \left( f'(g(x))g''(x) \right)' = \\
 \begin{array}{cccc}
 \swarrow \text{prodotto} & \downarrow \text{prodotto+} & \downarrow \text{prodotto} & \searrow \text{prodotto} \\
 & \downarrow \text{+raccogli} & & \\
 \left( f''(g(x)) \right)' g'(x)^2 + & 2f''(g(x))g'(x)g''(x) + & \left( f'(g(x)) \right)' g''(x) + & f'(g(x))g'''(x) \\
 \downarrow \text{catena} & \downarrow \text{copia} & \downarrow \text{catena} & \downarrow \text{copia} \\
 f'''(g(x))g'(x)g'(x)^2 + & 2f''(g(x))g'(x)g''(x) + & f''(g(x))g'(x)g''(x) + & f'(g(x))g'''(x) \\
 \downarrow \text{copia} & \downarrow \text{raccogli} & \swarrow \text{raccogli} & \swarrow \text{copia} \\
 f'''(g(x))g'(x)g'(x)^2 + & 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + & & f'(g(x))g'''(x)
 \end{array}
 \end{array}$$

Notate come abbiamo un **albero di derivazioni**.

Vediamo nel dettaglio il passaggio dalla derivata seconda alla terza. Deriviamo un'altra volta la seconda derivata

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \quad .$$

$$\begin{array}{l}
 (f \circ g)'''(x) = \left( f''(g(x))g'(x)^2 \right)' + \left( f'(g(x))g''(x) \right)' = \\
 \begin{array}{cccc}
 \swarrow \text{prodotto} & \downarrow \text{prodotto+} & \downarrow \text{prodotto} & \searrow \text{prodotto} \\
 & \downarrow \text{+raccogli} & & \\
 \left( f''(g(x)) \right)' g'(x)^2 + & 2f''(g(x))g'(x)g''(x) + & \left( f'(g(x)) \right)' g''(x) + & f'(g(x))g'''(x) \\
 \downarrow \text{catena} & \downarrow \text{copia} & \downarrow \text{catena} & \downarrow \text{copia} \\
 f'''(g(x))g'(x)g'(x)^2 + & 2f''(g(x))g'(x)g''(x) + & f''(g(x))g'(x)g''(x) + & f'(g(x))g'''(x) \\
 \downarrow \text{copia} & \downarrow \text{raccogli} & \swarrow \text{raccogli} & \swarrow \text{copia} \\
 f'''(g(x))g'(x)g'(x)^2 + & 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + & & f'(g(x))g'''(x)
 \end{array}
 \end{array}$$

Notate come abbiamo un **albero di derivazioni**.

In sintesi le derivate per  $n = 1, 2, 3, 4$  sono:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)$$

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x))g'(x)^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x)$$

$$(f \circ g)^{(4)}(x) = f^{(4)}(g(x))g'(x)^4 + 6f'''(g(x))g''(x)g'(x)^2 + 3f''(g(x))g''(x)^2 + 4f''(g(x))g'''(x)g'(x) + f'(g(x))g^{(4)}(x).$$

Vediamo che l'espansione di  $\frac{d^n}{dx^n} f(g(x))$  è sempre la somma di molti monomi della forma  $a f^{(m)}(g(x))g'(x)^{i_1} \dots g^{(n)}(x)^{i_n}$  per opportuni coefficienti interi  $a, n, m, i_1, \dots, i_n$ .

In sintesi le derivate per  $n = 1, 2, 3, 4$  sono:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)$$

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x))g'(x)^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x)$$

$$(f \circ g)^{(4)}(x) = f^{(4)}(g(x))g'(x)^4 + 6f'''(g(x))g''(x)g'(x)^2 + 3f''(g(x))g''(x)^2 + 4f''(g(x))g'''(x)g'(x) + f'(g(x))g^{(4)}(x).$$

Vediamo che l'espansione di  $\frac{d^n}{dx^n} f(g(x))$  è sempre la somma di molti monomi della forma  $a f^{(m)}(g(x))g'(x)^{i_1} \dots g^{(n)}(x)^{i_n}$  per opportuni coefficienti interi  $a, n, m, i_1, \dots, i_n$ .



In sintesi le derivate per  $n = 1, 2, 3, 4$  sono:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)$$

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x))g'(x)^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x)$$

$$(f \circ g)^{(4)}(x) = f^{(4)}(g(x))g'(x)^4 + 6f'''(g(x))g''(x)g'(x)^2 + 3f''(g(x))g''(x)^2 + 4f''(g(x))g'''(x)g'(x) + f'(g(x))g^{(4)}(x).$$

Vediamo che l'espansione di  $\frac{d^n}{dx^n} f(g(x))$  è sempre la somma di molti monomi della forma  $a f^{(m)}(g(x))g'(x)^{i_1} \dots g^{(n)}(x)^{i_n}$  per opportuni coefficienti interi  $a, n, m, i_1, \dots, i_n$ .

In sintesi le derivate per  $n = 1, 2, 3, 4$  sono:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)$$

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x))g'(x)^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x)$$

$$(f \circ g)''''(x) = f''''(g(x))g'(x)^4 + 6f'''(g(x))g''(x)g'(x)^2 + 3f''(g(x))g''(x)^2 + 4f''(g(x))g'''(x)g'(x) + f'(g(x))g''''(x).$$

Vediamo che l'espansione di  $\frac{d^n}{dx^n} f(g(x))$  è sempre la somma di molti monomi della forma  $a f^{(m)}(g(x))g'(x)^{i_1} \dots g^{(n)}(x)^{i_n}$  per opportuni coefficienti interi  $a, n, m, i_1, \dots, i_n$ .

La formula di Faà di Bruno permette di enumerare tutti questi monomi. La formula si esprime in diverse forme.

- La forma combinatoria. Questa è la forma più semplice, ma anche la più ridondante perché i monomi non sono mai raccolti (cioè tutti i coefficienti sono 1).
- Forme fattoriali, che raccolgono insieme monomi simili.

## Introduzione

### Forma combinatoria

- 2.1 Esempio per spiegare la forma combinatoria
- 2.2 Dimostrazione della formula combinatoria

### Forme fattoriali

### Note finali

# Fattoriale

I numeri interi positivi sono  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Dato  $n$  numero intero positivo, il prodotto dei primi  $n$  numeri è il **fattoriale** indicato come  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ .

Il numero  $n!$  è il numero di maniere diverse in cui si possono mettere in fila  $n$  oggetti diversi.

(Per convenzione se  $n = 0$  allora  $n! = 1$ ).

# Fattoriale

I numeri interi positivi sono  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Dato  $n$  numero intero positivo, il prodotto dei primi  $n$  numeri è il **fattoriale** indicato come  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ .

Il numero  $n!$  è il numero di maniere diverse in cui si possono mettere in fila  $n$  oggetti diversi.

(Per convenzione se  $n = 0$  allora  $n! = 1$ ).

# Cardinalità

Dato un insieme  $A$  allora  $|A|$  denota il numero di elementi contenuti nell'insieme  $A$ . (In gergo matematico si dice che  $|A|$  è la **cardinalità** di  $A$ )  
Esempi. Se  $A = \{1, 44, 4, 133\}$  allora  $|A| = 4$ . Se  $n$  è un numero intero positivo e  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  è l'insieme dei primi  $n$  numeri allora  $|A| = n$ .

# Cardinalità

Dato un insieme  $A$  allora  $|A|$  denota il numero di elementi contenuti nell'insieme  $A$ . (In gergo matematico si dice che  $|A|$  è la **cardinalità** di  $A$ )

Esempi. Se  $A = \{1, 44, 4, 133\}$  allora  $|A| = 4$ . Se  $n$  è un numero intero positivo e  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  è l'insieme dei primi  $n$  numeri allora  $|A| = n$ .



# Cardinalità

Dato un insieme  $A$  allora  $|A|$  denota il numero di elementi contenuti nell'insieme  $A$ . (In gergo matematico si dice che  $|A|$  è la **cardinalità** di  $A$ )  
Esempi. Se  $A = \{1, 44, 4, 133\}$  allora  $|A| = 4$ . Se  $n$  è un numero intero positivo e  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  è l'insieme dei primi  $n$  numeri allora  $|A| = n$ .

# Partizioni

Consideriamo l'insieme  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  dei primi  $n$  numeri. Una **partizione** di questo insieme è una famiglia di sottoinsiemi (non vuoti) ognuno dei quali contiene un elemento di  $A$ , senza tralasciare nessun elemento di  $A$ .

Esempio. Dato  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  allora  $\{\{2\}, \{4\}, \{3, 1\}\}$  è una sua partizione.

Chiameremo  $P_n$  l'insieme di tutte le partizioni di  $\{1, 2, \dots, n\}$ . (È un insieme di insiemi di insiemi di numeri!)

Esempio. Vi sono 5 diverse partizioni di  $\{1, 2, 3\}$ , e sono

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{l} \{\{1, 2, 3\}\}, \quad \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \\ \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \quad \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \quad \end{array} \right\}$$

Notate che  $|P_3| = 5$ .

# Partizioni

Consideriamo l'insieme  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  dei primi  $n$  numeri. Una **partizione** di questo insieme è una famiglia di sottoinsiemi (non vuoti) ognuno dei quali contiene un elemento di  $A$ , senza tralasciare nessun elemento di  $A$ .

Esempio. Dato  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  allora  $\{\{2\}, \{4\}, \{3, 1\}\}$  è una sua partizione.

Chiameremo  $P_n$  l'insieme di tutte le partizioni di  $\{1, 2, \dots, n\}$ . (È un insieme di insiemi di insiemi di numeri!)

Esempio. Vi sono 5 diverse partizioni di  $\{1, 2, 3\}$ , e sono

$$P_3 = \{ \{ \{1, 2, 3\} \}, \{ \{1, 2\}, \{3\} \}, \{ \{1\}, \{2, 3\} \}, \\ \{ \{1, 3\}, \{2\} \}, \{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \}, \quad \}$$

Notate che  $|P_3| = 5$ .

# Partizioni

Consideriamo l'insieme  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  dei primi  $n$  numeri. Una **partizione** di questo insieme è una famiglia di sottoinsiemi (non vuoti) ognuno dei quali contiene un elemento di  $A$ , senza tralasciare nessun elemento di  $A$ .

Esempio. Dato  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  allora  $\{\{2\}, \{4\}, \{3, 1\}\}$  è una sua partizione.

Chiameremo  $P_n$  l'insieme di tutte le partizioni di  $\{1, 2, \dots, n\}$ . (È un insieme di insiemi di insiemi di numeri!)

Esempio. Vi sono 5 diverse partizioni di  $\{1, 2, 3\}$ , e sono

$$P_3 = \{ \{ \{1, 2, 3\} \}, \{ \{1, 2\}, \{3\} \}, \{ \{1\}, \{2, 3\} \}, \\ \{ \{1, 3\}, \{2\} \}, \{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \}, \quad \}$$

Notate che  $|P_3| = 5$ .

# Partizioni

Consideriamo l'insieme  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  dei primi  $n$  numeri. Una **partizione** di questo insieme è una famiglia di sottoinsiemi (non vuoti) ognuno dei quali contiene un elemento di  $A$ , senza tralasciare nessun elemento di  $A$ .

Esempio. Dato  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  allora  $\{\{2\}, \{4\}, \{3, 1\}\}$  è una sua partizione.

Chiameremo  $P_n$  l'insieme di tutte le partizioni di  $\{1, 2, \dots, n\}$ . (È un insieme di insiemi di insiemi di numeri!)

Esempio. Vi sono 5 diverse partizioni di  $\{1, 2, 3\}$ , e sono

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{l} \{\{1, 2, 3\}\}, \quad \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \\ \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \quad \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \quad \end{array} \right\}$$

Notate che  $|P_3| = 5$ .

# Forma combinatoria

La formula di Faà di Bruno ha una forma combinatoria:

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) \quad (1)$$

dove

- $\sum_{\pi \in P_n}$  significa *sommare quanto segue al variare della scelta di una partizione  $\pi$  fra tutte le partizioni  $P_n$  di  $\{1, \dots, n\}$ ,*
- $\prod_{B \in \pi}$  significa *moltiplicare quanto segue al variare della scelta di  $B$  fra le "parti" della partizione  $\pi$  ; e inoltre*
- $|\pi|$  è il numero di parti in  $\pi$  mentre  $|B|$  è il numero di numeri nella parte  $B$ .

# Forma combinatoria

La formula di Faà di Bruno ha una forma combinatoria:

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) \quad (1)$$

dove

- $\sum_{\pi \in P_n}$  significa *sommare quanto segue al variare della scelta di una partizione  $\pi$  fra tutte le partizioni  $P_n$  di  $\{1, \dots, n\}$ ,*
- $\prod_{B \in \pi}$  significa *moltiplicare quanto segue al variare della scelta di  $B$  fra le "parti" della partizione  $\pi$  ; e inoltre*
- $|\pi|$  è il numero di parti in  $\pi$  mentre  $|B|$  è il numero di numeri nella parte  $B$ .

# Forma combinatoria

La formula di Faà di Bruno ha una forma combinatoria:

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) \quad (1)$$

dove

- $\sum_{\pi \in P_n}$  significa *sommare quanto segue al variare della scelta di una partizione  $\pi$  fra tutte le partizioni  $P_n$  di  $\{1, \dots, n\}$ ,*
- $\prod_{B \in \pi}$  significa *moltiplicare quanto segue al variare della scelta di  $B$  fra le "parti" della partizione  $\pi$  ; e inoltre*
- $|\pi|$  è il numero di parti in  $\pi$  mentre  $|B|$  è il numero di numeri nella parte  $B$ .



# Forma combinatoria

La formula di Faà di Bruno ha una forma combinatoria:

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) \quad (1)$$

dove

- $\sum_{\pi \in P_n}$  significa *sommare quanto segue al variare della scelta di una partizione  $\pi$  fra tutte le partizioni  $P_n$  di  $\{1, \dots, n\}$ ,*
- $\prod_{B \in \pi}$  significa *moltiplicare quanto segue al variare della scelta di  $B$  fra le "parti" della partizione  $\pi$  ; e inoltre*
- $|\pi|$  è il numero di parti in  $\pi$  mentre  $|B|$  è il numero di numeri nella parte  $B$ .

## Introduzione

### Forma combinatoria

- 2.1 Esempio per spiegare la forma combinatoria
- 2.2 Dimostrazione della formula combinatoria

### Forme fattoriali

- 3.1 Prima forma fattoriale
- 3.2 Seconda forma fattoriale

## Note finali

Vediamo ora un esempio per spiegare come ogni possibile derivazione sia associata a una partizione.

Innanzitutto notiamo che ogni partizione si può univocamente rappresentare ordinando i numeri in ogni parte, e le parti per il loro minimo elemento. Esempio ( $n = 8$ )

$$\begin{aligned} \{\{5, 7\}, \{2\}, \{6\}, \{3, 1, 8, 4\}\} &\rightarrow \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\} \\ \{\{8\}, \{3\}, \{7, 1\}, \{4\}, \{2, 5\}, \{6\}\} &\rightarrow \{\{1, 7\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}\} \end{aligned}$$

Noi ora deriviamo  $f(g(x))$  per 8 volte, seguendo lo schema  $\{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$  giù per l'albero delle derivazioni.

Vediamo ora un esempio per spiegare come ogni possibile derivazione sia associata a una partizione.

Innanzitutto notiamo che ogni partizione si può univocamente rappresentare ordinando i numeri in ogni parte, e le parti per il loro minimo elemento. Esempio ( $n = 8$ )

$$\begin{aligned} \{\{5, 7\}, \{2\}, \{6\}, \{3, 1, 8, 4\}\} &\rightarrow \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\} \\ \{\{8\}, \{3\}, \{7, 1\}, \{4\}, \{2, 5\}, \{6\}\} &\rightarrow \{\{1, 7\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}\} \end{aligned}$$

Noi ora deriviamo  $f(g(x))$  per 8 volte, seguendo lo schema  $\{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$  giù per l'albero delle derivazioni.

Vediamo ora un esempio per spiegare come ogni possibile derivazione sia associata a una partizione.

Innanzitutto notiamo che ogni partizione si può univocamente rappresentare ordinando i numeri in ogni parte, e le parti per il loro minimo elemento. Esempio ( $n = 8$ )

$$\begin{aligned} \{\{5, 7\}, \{2\}, \{6\}, \{3, 1, 8, 4\}\} &\rightarrow \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\} \\ \{\{8\}, \{3\}, \{7, 1\}, \{4\}, \{2, 5\}, \{6\}\} &\rightarrow \{\{1, 7\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}\} \end{aligned}$$

Noi ora deriviamo  $f(g(x))$  per 8 volte, seguendo lo schema  $\{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$  giù per l'albero delle derivazioni.

- Il primo passo è obbligato

$$f(g(x)) \quad \rightarrow \quad g'(x)f'(g(x))$$

e gli associamo

$\{\{1, \dots$

$\dots$

$\dots$

$\dots\}$

- Ora abbiamo due termini, decidiamo di derivare il secondo:

$$g'(x)f'(g(x)) \quad \rightarrow \quad g'(x)g'(x)f''(g(x))$$

e gli associamo

$$\begin{aligned} & \{ \{1, \dots \\ & \quad \{2, \dots \\ & \quad \dots \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

- Ora abbiamo tre termini, decidiamo di derivare il primo:

$$g'(x)g'(x)f''(g(x)) \quad \rightarrow \quad g''(x)g'(x)f''(g(x))$$

e gli associamo

$$\begin{aligned} & \{ \{ 1, 3, \dots \\ & \quad \{ 2, \dots \\ & \quad \dots \\ & \quad \dots \end{aligned}$$



- Abbiamo di nuovo tre termini, decidiamo di derivare nuovamente il primo:

$$g''(x)g'(x)f''(g(x)) \quad \rightarrow \quad g'''(x)g'(x)f''(g(x))$$

e gli associamo

$$\begin{aligned} & \{ \{ 1, 3, 4, \dots \\ & \quad \{ 2, \dots \\ & \quad \dots \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

- Abbiamo di nuovo tre termini, decidiamo di derivare il terzo:

$$g'''(x)g'(x)f''(g(x)) \quad \rightarrow \quad g'''(x)g'(x)g'(x)f'''(g(x))$$

e gli associamo

$$\begin{aligned} & \{ \{ 1, 3, 4, \dots \\ & \quad \{ 2, \dots \\ & \quad \{ 5, \dots \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

- Ora abbiamo quattro termini, decidiamo di derivare il quarto:

$$g'''(x)g'(x)g'(x)f'''(g(x)) \quad \rightarrow \quad g'''(x)g'(x)g'(x)g'(x)f^{(4)}(g(x))$$

e gli associamo

$$\begin{aligned} &\{1, 3, 4, \dots \\ &\{2, \dots \\ &\{5, \dots \\ &\{6, \dots \end{aligned}$$

- Ora abbiamo cinque termini, decidiamo di derivare il terzo:

$$g'''(x)g'(x)g'(x)g'(x)f^{(4)}(g(x)) \rightarrow g'''(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x))$$

e gli associamo

$$\{1, 3, 4, \dots$$

$$\{2, \dots$$

$$\{5, 7, \dots$$

$$\{6, \dots$$

- Ora abbiamo cinque termini, decidiamo di derivare il primo:

$$g'''(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x)) \rightarrow g^{(4)}(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x))$$

e gli associamo

$$\begin{aligned} & \{ \{1, 3, 4, 8 \dots \\ & \quad \{2, \dots \\ & \quad \{5, 7, \dots \\ & \quad \{6, \dots \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto il monomio

$$g^{(4)}(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x))$$

che è associato alla partizione

$$\{\{1, 3, 4, 8\}, \\ \{2\}, \\ \{5, 7\}, \\ \{6\}\}$$

# Ridondanza

Vediamo inoltre che questa forma è molto ridondante. Per esempio per  $n = 4$  il monomio  $g''(x)g''(x)f''(g(x)) = g''(x)^2 f''(g(x))$  appare tre volte, associato alle partizioni

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

$$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

$$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$$

Similmente il monomio

$g^{(4)}(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x)) = f^{(4)}(g(x))g'(x)^2 g''(x)g^{(4)}(x)$   
 ottenuto nell'esempio precedente può essere ottenuto da 420 diverse partizioni in  $P_8$  (Questo sarà dimostrato in seguito).

Vedremo che nella prossima sezione che la *forma fattoriale* riduce la ridondanza (ma allunga la formula...).

## Ridondanza

Vediamo inoltre che questa forma è molto ridondante. Per esempio per  $n = 4$  il monomio  $g''(x)g''(x)f''(g(x)) = g''(x)^2 f''(g(x))$  appare tre volte, associato alle partizioni

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

$$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

$$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$$

Similmente il monomio

$$g^{(4)}(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x)) = f^{(4)}(g(x))g'(x)^2 g''(x)g^{(4)}(x)$$

ottenuto nell'esempio precedente può essere ottenuto da 420 diverse partizioni in  $P_8$  (Questo sarà dimostrato in seguito).

Vedremo che nella prossima sezione che la *forma fattoriale* riduce la ridondanza (ma allunga la formula...).



## Ridondanza

Vediamo inoltre che questa forma è molto ridondante. Per esempio per  $n = 4$  il monomio  $g''(x)g''(x)f''(g(x)) = g''(x)^2 f''(g(x))$  appare tre volte, associato alle partizioni

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

$$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

$$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$$

Similmente il monomio

$$g^{(4)}(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x)) = f^{(4)}(g(x))g'(x)^2 g''(x)g^{(4)}(x)$$

ottenuto nell'esempio precedente può essere ottenuto da 420 diverse partizioni in  $P_8$  (Questo sarà dimostrato in seguito).

Vedremo che nella prossima sezione che la *forma fattoriale* riduce la ridondanza (ma allunga la formula...).

## Introduzione

### Forma combinatoria

- 2.1 Esempio per spiegare la forma combinatoria
- 2.2 Dimostrazione della formula combinatoria

### Forme fattoriali

- 3.1 Prima forma fattoriale
- 3.2 Seconda forma fattoriale

### Note finali

Ora dimostriamo la validità della formula combinatoria, usando l'induzione. Il caso  $n = 1$  è vero perché  $P_1$  contiene una sola partizione, che è  $\pi = \{\{1\}\}$ , che è associata a  $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ . Per completare la dimostrazione, assumiamo che

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x)$$

sia valida, e deriviamo ancora una volta.

Ora dimostriamo la validità della formula combinatoria, usando l'induzione. Il caso  $n = 1$  è vero perché  $P_1$  contiene una sola partizione, che è  $\pi = \{\{1\}\}$ , che è associata a  $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ . Per completare la dimostrazione, assumiamo che

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x)$$

sia valida, e deriviamo ancora una volta.

Questo produce due termini

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)^{(n+1)}(x) &= \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|+1)}(g(x))g'(x) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) + \\
 &+ \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \sum_{\hat{B} \in \pi} \prod_{B \in \pi} g^{(|B|+\delta_{B,\hat{B}})}(x)
 \end{aligned}$$

dove  $\delta_{B,\hat{B}}$  è il **delta di Kronecker**<sup>1</sup>

$$\delta_{A,B} = \begin{cases} 1, & \text{if } A = B \\ 0, & \text{if } A \neq B \end{cases}$$

<sup>1</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker\\_delta](http://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_delta)

La domanda ora è: come si generano le partizioni in  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo dalle partizioni in  $\pi \in P_n$ .

- 1 Il primo modo è decidere che il singoletto  $\{n+1\}$  è una parte di  $\tilde{\pi}$ , cosicché  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4$  e costruiamo

$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \in P_5$ .

- 2 Il secondo modo è di decidere che  $n+1$  è un elemento di una parte  $\tilde{B}$  in  $\tilde{\pi}$ , e associare  $\tilde{B}$  a una parte  $\hat{B}$  in  $\pi$ , tramite  $\tilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4$  e costruiamo

$\tilde{\pi} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\} \in P_5$  quando  $\hat{B} = \{1, 4\}$ ,  $\tilde{B} = \{1, 4, 5\}$

$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} \in P_5$  quando  $\hat{B} = \{2, 3\}$ ,  $\tilde{B} = \{2, 3, 5\}$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo da  $\pi \in P_n$  e, nel secondo caso, scegliendo  $\hat{B} \in \pi$ .

La domanda ora è: come si generano le partizioni in  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo dalle partizioni in  $\pi \in P_n$ .

- 1 Il primo modo è decidere che il singoletto  $\{n+1\}$  è una parte di  $\tilde{\pi}$ , cosicché  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4$  e costruiamo

$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \in P_5$ .

- 2 Il secondo modo è di decidere che  $n+1$  è un elemento di una parte  $\tilde{B}$  in  $\tilde{\pi}$ , e associare  $\tilde{B}$  a una parte  $\hat{B}$  in  $\pi$ , tramite  $\tilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4$  e costruiamo

$\tilde{\pi} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\} \in P_5$  quando  $\hat{B} = \{1, 4\}$ ,  $\tilde{B} = \{1, 4, 5\}$

$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} \in P_5$  quando  $\hat{B} = \{2, 3\}$ ,  $\tilde{B} = \{2, 3, 5\}$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo da  $\pi \in P_n$  e, nel secondo caso, scegliendo  $\hat{B} \in \pi$ .

La domanda ora è: come si generano le partizioni in  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo dalle partizioni in  $\pi \in P_n$ .

- 1 Il primo modo è decidere che il singoletto  $\{n+1\}$  è una parte di  $\tilde{\pi}$ , cosicché  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \in P_5.$$

- 2 Il secondo modo è di decidere che  $n+1$  è un elemento di una parte  $\tilde{B}$  in  $\tilde{\pi}$ , e associare  $\tilde{B}$  a una parte  $\hat{B}$  in  $\pi$ , tramite  $\tilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{1, 4\}, \tilde{B} = \{1, 4, 5\}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{2, 3\}, \tilde{B} = \{2, 3, 5\}$$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo da  $\pi \in P_n$  e, nel secondo caso, scegliendo  $\hat{B} \in \pi$ .



La domanda ora è: come si generano le partizioni in  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo dalle partizioni in  $\pi \in P_n$ .

- 1 Il primo modo è decidere che il singoletto  $\{n+1\}$  è una parte di  $\tilde{\pi}$ , cosicché  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \in P_5.$$

- 2 Il secondo modo è di decidere che  $n+1$  è un elemento di una parte  $\tilde{B}$  in  $\tilde{\pi}$ , e associare  $\tilde{B}$  a una parte  $\hat{B}$  in  $\pi$ , tramite  $\tilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{1, 4\}, \tilde{B} = \{1, 4, 5\}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{2, 3\}, \tilde{B} = \{2, 3, 5\}$$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo da  $\pi \in P_n$  e, nel secondo caso, scegliendo  $\hat{B} \in \pi$ .

La domanda ora è: come si generano le partizioni in  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo dalle partizioni in  $\pi \in P_n$ .

- 1 Il primo modo è decidere che il singoletto  $\{n+1\}$  è una parte di  $\tilde{\pi}$ , cosicché  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \in P_5.$$

- 2 Il secondo modo è di decidere che  $n+1$  è un elemento di una parte  $\tilde{B}$  in  $\tilde{\pi}$ , e associare  $\tilde{B}$  a una parte  $\hat{B}$  in  $\pi$ , tramite  $\tilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{1, 4\}, \tilde{B} = \{1, 4, 5\}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{2, 3\}, \tilde{B} = \{2, 3, 5\}$$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo da  $\pi \in P_n$  e, nel secondo caso, scegliendo  $\hat{B} \in \pi$ .

La domanda ora è: come si generano le partizioni in  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo dalle partizioni in  $\pi \in P_n$ .

- 1 Il primo modo è decidere che il singoletto  $\{n+1\}$  è una parte di  $\tilde{\pi}$ , cosicché  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \in P_5.$$

- 2 Il secondo modo è di decidere che  $n+1$  è un elemento di una parte  $\tilde{B}$  in  $\tilde{\pi}$ , e associare  $\tilde{B}$  a una parte  $\hat{B}$  in  $\pi$ , tramite  $\tilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{1, 4\}, \tilde{B} = \{1, 4, 5\}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{2, 3\}, \tilde{B} = \{2, 3, 5\}$$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo da  $\pi \in P_n$  e, nel secondo caso, scegliendo  $\hat{B} \in \pi$ .

La domanda ora è: come si generano le partizioni in  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo dalle partizioni in  $\pi \in P_n$ .

- 1 Il primo modo è decidere che il singoletto  $\{n+1\}$  è una parte di  $\tilde{\pi}$ , cosicché  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \in P_5.$$

- 2 Il secondo modo è di decidere che  $n+1$  è un elemento di una parte  $\tilde{B}$  in  $\tilde{\pi}$ , e associare  $\tilde{B}$  a una parte  $\hat{B}$  in  $\pi$ , tramite  $\tilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{1, 4\}, \tilde{B} = \{1, 4, 5\}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{2, 3\}, \tilde{B} = \{2, 3, 5\}$$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo da  $\pi \in P_n$  e, nel secondo caso, scegliendo  $\hat{B} \in \pi$ .



La domanda ora è: come si generano le partizioni in  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo dalle partizioni in  $\pi \in P_n$ .

- 1 Il primo modo è decidere che il singoletto  $\{n+1\}$  è una parte di  $\tilde{\pi}$ , cosicché  $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\} \in P_5.$$

- 2 Il secondo modo è di decidere che  $n+1$  è un elemento di una parte  $\tilde{B}$  in  $\tilde{\pi}$ , e associare  $\tilde{B}$  a una parte  $\hat{B}$  in  $\pi$ , tramite  $\tilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$ .

*Esempio, partiamo da*

$$\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \in P_4 \text{ e costruiamo}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{1, 4\}, \tilde{B} = \{1, 4, 5\}$$

$$\tilde{\pi} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\} \in P_5 \text{ quando } \hat{B} = \{2, 3\}, \tilde{B} = \{2, 3, 5\}$$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna  $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$  partendo da  $\pi \in P_n$  e, nel secondo caso, scegliendo  $\hat{B} \in \pi$ .

La prima parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al primo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|+1)}(g(x))g'(x) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) = \\ &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \in \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (2)$$

infatti ciascun  $\tilde{\pi}$  soddisfa  $\{n+1\} \in \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi| + 1$ , e inoltre il caso  $\tilde{B} = \{n+1\}$  genera il termine extra  $g'(x)$  che è a sinistra.

La prima parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al primo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|+1)}(g(x))g'(x) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) = \\ & = \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \in \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (2)$$

infatti ciascun  $\tilde{\pi}$  soddisfa  $\{n+1\} \in \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi| + 1$ , e inoltre il caso  $\tilde{B} = \{n+1\}$  genera il termine extra  $g'(x)$  che è a sinistra.

La prima parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al primo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|+1)}(g(x))g'(x) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) = \\ &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \in \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (2)$$

infatti ciascun  $\tilde{\pi}$  soddisfa  $\{n+1\} \in \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi| + 1$ , e inoltre il caso  $\tilde{B} = \{n+1\}$  genera il termine extra  $g'(x)$  che è a sinistra.



La prima parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al primo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|+1)}(g(x)) g'(x) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) = \\ &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \in \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (2)$$

infatti ciascun  $\tilde{\pi}$  soddisfa  $\{n+1\} \in \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi| + 1$ , e inoltre il caso  $\tilde{B} = \{n+1\}$  genera il termine extra  $g'(x)$  che è a sinistra.

La seconda parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al secondo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \sum_{\hat{B} \in \pi} \prod_{B \in \pi} g^{(|B| + \delta_{B, \hat{B}})}(x) = \\ & = \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \notin \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

infatti

- tutte tali  $\tilde{\pi}$  soddisfano  $\{n+1\} \notin \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi|$ , e ancora
- vi sono tante  $\tilde{\pi}$  associate a  $\pi$  quante sono le  $\hat{B} \in \pi$  e ,
- quando  $\hat{B} = B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 1$  e  $|\tilde{B}| = |B| + 1$ , laddove
- quando  $\hat{B} \neq B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 0$  e  $|\tilde{B}| = |B|$ .

La seconda parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al secondo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \sum_{\hat{B} \in \pi} \prod_{B \in \pi} g^{(|B| + \delta_{B, \hat{B}})}(x) = \\ & = \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \notin \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

infatti

- tutte tali  $\tilde{\pi}$  soddisfano  $\{n+1\} \notin \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi|$ , e ancora
- vi sono tante  $\tilde{\pi}$  associate a  $\pi$  quante sono le  $\hat{B} \in \pi$ ,
- quando  $\hat{B} = B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 1$  e  $|\tilde{B}| = |B| + 1$ , laddove
- quando  $\hat{B} \neq B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 0$  e  $|\tilde{B}| = |B|$ .

La seconda parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al secondo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \sum_{\hat{B} \in \pi} \prod_{B \in \pi} g^{(|B| + \delta_{B, \hat{B}})}(x) = \\ & = \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \notin \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

infatti

- tutte tali  $\tilde{\pi}$  soddisfano  $\{n+1\} \notin \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi|$ , e ancora
- vi sono tante  $\tilde{\pi}$  associate a  $\pi$  quante sono le  $\hat{B} \in \pi$ ,
- quando  $\hat{B} = B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 1$  e  $|\tilde{B}| = |B| + 1$ , laddove
- quando  $\hat{B} \neq B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 0$  e  $|\tilde{B}| = |B|$ .

La seconda parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al secondo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \sum_{\hat{B} \in \pi} \prod_{B \in \pi} g^{(|B| + \delta_{B, \hat{B}})}(x) = \\ & = \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \notin \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

infatti

- tutte tali  $\tilde{\pi}$  soddisfano  $\{n+1\} \notin \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi|$ , e ancora
- vi sono **tante  $\tilde{\pi}$  associate a  $\pi$  quante sono le  $\hat{B} \in \pi$** ,
- quando  $\hat{B} = B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 1$  e  $|\tilde{B}| = |B| + 1$ , laddove
- quando  $\hat{B} \neq B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 0$  e  $|\tilde{B}| = |B|$ .

La seconda parte di  $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$  è associata al secondo metodo generativo

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \sum_{\hat{B} \in \pi} \prod_{B \in \pi} g^{(|B| + \delta_{B, \hat{B}})}(x) = \\ & = \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \notin \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

infatti

- tutte tali  $\tilde{\pi}$  soddisfano  $\{n+1\} \notin \tilde{\pi}$  e  $|\tilde{\pi}| = |\pi|$ , e ancora
- vi sono tante  $\tilde{\pi}$  associate a  $\pi$  quante sono le  $\hat{B} \in \pi$  e ,
- quando  $\hat{B} = B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 1$  e  $|\tilde{B}| = |B| + 1$ , laddove
- quando  $\hat{B} \neq B$ , abbiamo  $\delta_{B, \hat{B}} = 0$  e  $|\tilde{B}| = |B|$ .

Sommando le precedenti identità (2) e (3) concludiamo che

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)^{(n+1)}(x) &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \in \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) + \\
 &+ \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \notin \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) = \\
 &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x)
 \end{aligned}$$

che è la formula per  $n + 1$ . □



Introduzione

Forma combinatoria

**Forme fattoriali**

3.1 Prima forma fattoriale

3.2 Seconda forma fattoriale

Note finali



Le forme fattoriali raccolgono insieme i monomi simili nella forma combinatoria; l'espressione della formula è più complessa, ma più utile in talune applicazioni.

## Introduzione

### Forma combinatoria

- 2.1 Esempio per spiegare la forma combinatoria
- 2.2 Dimostrazione della formula combinatoria

### Forme fattoriali

- 3.1 Prima forma fattoriale
- 3.2 Seconda forma fattoriale

## Note finali

# Forma fattoriale

I monomi nella forma combinatoria (1) possono essere raccolti per dare

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum \frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}} \cdot f^{(m_1+\dots+m_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^n \left(g^{(j)}(x)\right)^{m_j} \quad (4)$$

dove la somma si effettua su tutte le scelte nonnegative di interi  $(m_1, \dots, m_n)$  che soddisfano il vincolo

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots + n \cdot m_n = n.$$

I monomi

$$f^{(m_1+\dots+m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^n \left(g^{(j)}(x)\right)^{m_j}$$

che compaiono nella formula (4) si possono scrivere anche come

$$f^{(m_1+\dots+m_n)}(g(x)) (g'(x))^{m_1} (g''(x))^{m_2} \dots (g^{(n)}(x))^{m_n} \quad (5)$$

Si vede chiaramente che ogni derivata di  $g$  compare una sola volta, con un esponente variabile; dunque i monomi non sono ripetuti in questa formula.

Dunque il termine

$$\frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}}$$

moltiplicativo è il coefficiente intero del monomio.

Alle volte la formula (4) viene scritta nella forma “mnemonica”:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \cdot f^{(m_1 + \cdots + m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^n \left( \frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{m_j}.$$

La formula presentata da Francesco Faà di Bruno nel 1855 negli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* era scritta in questo modo.

Come si collega questa formula (4) con la precedente formula combinatoria (1)?

Alle volte la formula (4) viene scritta nella forma “mnemonica”:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_n!} \cdot f^{(m_1 + \cdots + m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^n \left( \frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{m_j}.$$

La formula presentata da Francesco Faà di Bruno nel 1855 negli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* era scritta in questo modo.

Come si collega questa formula (4) con la precedente formula combinatoria (1)?

## La firma della partizione

Prendiamo una partizione  $\pi \in P_n$ . Definiamo l'intero  $m_j$  come il numero di parti  $A \in \pi$  tali che  $|A| = j$ . Diremo che questi numeri  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sono la **firma** della partizione  $\pi$ .

Ovviamente per ciascuna partizione, si ha  $|\pi| = (m_1 + \dots + m_n)$ ; inoltre  $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots + n \cdot m_n = n$  dato che  $\pi$  è una partizione di  $\{1, \dots, n\}$ .

Se una partizione ha firma  $m_1, m_2, \dots, m_n$  allora genera il monomio

$$\begin{aligned} & f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^n \left( g^{(j)}(x) \right)^{m_j} = \\ & = f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(x)) (g'(x))^{m_1} (g''(x))^{m_2} \dots \left( g^{(n)}(x) \right)^{m_n}. \end{aligned}$$

visto in (5).



## La firma della partizione

Prendiamo una partizione  $\pi \in P_n$ . Definiamo l'intero  $m_j$  come il numero di parti  $A \in \pi$  tali che  $|A| = j$ . Diremo che questi numeri  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sono la **firma** della partizione  $\pi$ .

Ovviamente per ciascuna partizione, si ha  $|\pi| = (m_1 + \dots + m_n)$ ; inoltre  $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots + n \cdot m_n = n$  dato che  $\pi$  è una partizione di  $\{1, \dots, n\}$ .

Se una partizione ha firma  $m_1, m_2, \dots, m_n$  allora genera il monomio

$$\begin{aligned} & f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^n \left( g^{(j)}(x) \right)^{m_j} = \\ & = f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(x)) (g'(x))^{m_1} (g''(x))^{m_2} \dots \left( g^{(n)}(x) \right)^{m_n}. \end{aligned}$$

visto in (5).

## La firma della partizione

Prendiamo una partizione  $\pi \in P_n$ . Definiamo l'intero  $m_j$  come il numero di parti  $A \in \pi$  tali che  $|A| = j$ . Diremo che questi numeri  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sono la **firma** della partizione  $\pi$ .

Ovviamente per ciascuna partizione, si ha  $|\pi| = (m_1 + \dots + m_n)$ ; inoltre  $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots + n \cdot m_n = n$  dato che  $\pi$  è una partizione di  $\{1, \dots, n\}$ .

Se una partizione ha firma  $m_1, m_2, \dots, m_n$  allora genera il monomio

$$\begin{aligned} & f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^n \left( g^{(j)}(x) \right)^{m_j} = \\ & = f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(x)) (g'(x))^{m_1} (g''(x))^{m_2} \dots \left( g^{(n)}(x) \right)^{m_n}. \end{aligned}$$

visto in (5).

## La firma della partizione

Prendiamo una partizione  $\pi \in P_n$ . Definiamo l'intero  $m_j$  come il numero di parti  $A \in \pi$  tali che  $|A| = j$ . Diremo che questi numeri  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sono la **firma** della partizione  $\pi$ .

Ovviamente per ciascuna partizione, si ha  $|\pi| = (m_1 + \dots + m_n)$ ; inoltre  $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \dots + n \cdot m_n = n$  dato che  $\pi$  è una partizione di  $\{1, \dots, n\}$ .

Se una partizione ha firma  $m_1, m_2, \dots, m_n$  allora genera il monomio

$$\begin{aligned} & f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^n \left( g^{(j)}(x) \right)^{m_j} = \\ & = f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(x)) (g'(x))^{m_1} (g''(x))^{m_2} \dots \left( g^{(n)}(x) \right)^{m_n}. \end{aligned}$$

visto in (5).

## Firma nell'esempio

Seguiamo di nuovo la traccia del primo esempio.

Nel primo esempio noi calcolammo un termine della derivata ottava di  $f(g(x))$  seguendo la partizione  $\pi = \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$ , e ottenemmo il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x) \quad .$$

In questa  $\pi$  noi abbiamo

$m_1 = 2$  singoletti, cioè  $\{2\}, \{6\}$

$m_2 = 1$  coppie, cioè  $\{5, 7\}$

$m_3 = 0$  triple,

$m_4 = 1$  quadruple, cioè  $\{1, 3, 4, 8\}$ ,

e dopo  $m_5 = \dots = m_8 = 0$ .

## Firma nell'esempio

Seguiamo di nuovo la traccia del primo esempio.

Nel primo esempio noi calcolammo un termine della derivata ottava di  $f(g(x))$  seguendo la partizione  $\pi = \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$ , e ottenemmo il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x) \quad .$$

In questa  $\pi$  noi abbiamo

$m_1 = 2$  singoletti, cioè  $\{2\}, \{6\}$

$m_2 = 1$  coppie, cioè  $\{5, 7\}$

$m_3 = 0$  triple,

$m_4 = 1$  quadruple, cioè  $\{1, 3, 4, 8\}$ ,

e dopo  $m_5 = \dots = m_8 = 0$ .

## Firma nell'esempio

Seguiamo di nuovo la traccia del primo esempio.

Nel primo esempio noi calcolammo un termine della derivata ottava di  $f(g(x))$  seguendo la partizione  $\pi = \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$ , e ottenemmo il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x) \quad .$$

In questa  $\pi$  noi abbiamo

$m_1 = 2$  singoletti, cioè  $\{2\}, \{6\}$

$m_2 = 1$  coppie, cioè  $\{5, 7\}$

$m_3 = 0$  triple,

$m_4 = 1$  quadruple, cioè  $\{1, 3, 4, 8\}$ ,

e dopo  $m_5 = \dots = m_8 = 0$ .

## Firma nell'esempio

Seguiamo di nuovo la traccia del primo esempio.

Nel primo esempio noi calcolammo un termine della derivata ottava di  $f(g(x))$  seguendo la partizione  $\pi = \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$ , e ottenemmo il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x) \quad .$$

In questa  $\pi$  noi abbiamo

$m_1 = 2$  singoletti, cioè  $\{2\}, \{6\}$

$m_2 = 1$  coppie, cioè  $\{5, 7\}$

$m_3 = 0$  triple,

$m_4 = 1$  quadruple, cioè  $\{1, 3, 4, 8\}$ ,

e dopo  $m_5 = \dots = m_8 = 0$ .

## Firma nell'esempio

Seguiamo di nuovo la traccia del primo esempio.

Nel primo esempio noi calcolammo un termine della derivata ottava di  $f(g(x))$  seguendo la partizione  $\pi = \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$ , e ottenemmo il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x) \quad .$$

In questa  $\pi$  noi abbiamo

$m_1 = 2$  singoletti, cioè  $\{2\}, \{6\}$

$m_2 = 1$  coppie, cioè  $\{5, 7\}$

$m_3 = 0$  triple,

$m_4 = 1$  quadruple, cioè  $\{1, 3, 4, 8\}$ ,

e dopo  $m_5 = \dots = m_8 = 0$ .



## Firma nell'esempio

Seguiamo di nuovo la traccia del primo esempio.

Nel primo esempio noi calcolammo un termine della derivata ottava di  $f(g(x))$  seguendo la partizione  $\pi = \{\{1, 3, 4, 8\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{6\}\}$ , e ottenemmo il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x) \quad .$$

In questa  $\pi$  noi abbiamo

$m_1 = 2$  singoletti, cioè  $\{2\}, \{6\}$

$m_2 = 1$  coppie, cioè  $\{5, 7\}$

$m_3 = 0$  triple,

$m_4 = 1$  quadruple, cioè  $\{1, 3, 4, 8\}$ ,

e dopo  $m_5 = \dots = m_8 = 0$ .

## Costruzione di partizioni

Sia ora data una firma.

Come possiamo costruire ogni partizione con questa stessa firma?

Usiamo la firma data dall'esempio  $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 0, m_4 = 1, m_5 = \dots = m_8 = 0$  per mostrare il meccanismo.

Prepariamo lo scheletro

$$\{ \{ \}, \{ \}, \{ , \}, \{ , , , \} \}$$

Poi scriviamo un ordinamento di  $n = 8$  numeri e la inseriamo nello scheletro.

$$\begin{array}{cccccccc} 6, & 2 & 5 & 7 & 8 & 4 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{ \{6\}, & \{2\}, & \{5, 7\}, & \{8, 4, 1, 3\} \} \end{array}$$

Questa operazione si può fare in  $n! = 8!$  maniere diverse.

## Costruzione di partizioni

Sia ora data una firma.

Come possiamo costruire ogni partizione con questa stessa firma?

Usiamo la firma data dall'esempio  $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 0, m_4 = 1, m_5 = \dots = m_8 = 0$  per mostrare il meccanismo.

Prepariamo lo scheletro

$$\{ \{ \}, \{ \}, \{ , \}, \{ , , , \} \}$$

Poi scriviamo un ordinamento di  $n = 8$  numeri e la inseriamo nello scheletro.

$$\begin{array}{cccccccc} 6, & 2 & 5 & 7 & 8 & 4 & 1 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{ \{6\}, & \{2\}, & \{5, 7\}, & \{8, 4, 1, 3\} \} \end{array}$$

Questa operazione si può fare in  $n! = 8!$  maniere diverse.

Questa partizione però non è univocamente ottenuta.  
Possiamo infatti scambiare di posto le parti con lo stesso numero di elementi.

$$\begin{array}{c}
 \{ \{6\}, \{2\}, \{5, 7\}, \{8, 4, 1, 3\} \} \\
 \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \\
 \{ \{2\}, \{6\}, \{5, 7\}, \{8, 4, 1, 3\} \}
 \end{array}$$

Questo si può fare in  $m_1!m_2!\dots m_n!$  maniere.



## Dimostrazione

Il ragionamento che abbiamo esemplificato dimostra che la formula di Faà di Bruno (4) segue dalla formula combinatoria (1) .

Abbiamo visto che, data una firma  $m_1, m_2, \dots, m_m$ , possiamo riempire lo scheletro in  $n!$  maniere, ma così facendo otteniamo più volte le stesse partizioni, dunque dobbiamo dividere  $n!$  per

$$m_1! m_2! \dots m_n! \cdot 1!^{m_1} 2!^{m_2} \dots n!^{m_n} .$$

Abbiamo così mostrato che vi sono esattamente

$$\frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}}$$

partizioni  $\pi \in P_n$  con firma

$$m_1, m_2, \dots, m_m .$$

Tutte le partizioni con la stessa firma generano lo stesso monomio

$$f^{(m_1+\dots+m_n)}(g(x)) (g'(x))^{m_1} (g''(x))^{m_2} \dots (g^{(n)}(x))^{m_n} .$$

Dunque se raccogliamo tutti i monomi ripetuti nella forma combinatoria il coefficiente intero del monomio precedente sarà esattamente

$$\frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}} \quad \square$$

## Coefficiente nell'esempio

La firma dell'esempio è  $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 0, m_4 = 1,$   
 $m_5 = \dots = m_8 = 0.$

Così vi sono

$$\frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}} = \frac{8!}{2! 1!^2 1! 2!^1 0! 3!^0 1! 4!^1} = 420$$

diverse partizioni in  $P_8$  che generano il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x).$$

Questo significa che il coefficiente di questo monomio è 420.

Con questo esempio possiamo apprezzare l'efficacia della formula di Faà di Bruno, che ci permette di calcolare i coefficienti dei monomi in maniera "semplice".



## Coefficiente nell'esempio

La firma dell'esempio è  $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 0, m_4 = 1,$   
 $m_5 = \dots = m_8 = 0.$

Così vi sono

$$\frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}} = \frac{8!}{2! 1!^2 1! 2!^1 0! 3!^0 1! 4!^1} = 420$$

diverse partizioni in  $P_8$  che generano il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x).$$

Questo significa che il coefficiente di questo monomio è 420.

Con questo esempio possiamo apprezzare l'efficacia della formula di Faà di Bruno, che ci permette di calcolare i coefficienti dei monomi in maniera "semplice".

## Coefficiente nell'esempio

La firma dell'esempio è  $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 0, m_4 = 1,$   
 $m_5 = \dots = m_8 = 0.$

Così vi sono

$$\frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}} = \frac{8!}{2! 1!^2 1! 2!^1 0! 3!^0 1! 4!^1} = 420$$

diverse partizioni in  $P_8$  che generano il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x).$$

Questo significa che il coefficiente di questo monomio è 420.

Con questo esempio possiamo apprezzare l'efficacia della formula di Faà di Bruno, che ci permette di calcolare i coefficienti dei monomi in maniera "semplice".

## Introduzione

### Forma combinatoria

- 2.1 Esempio per spiegare la forma combinatoria
- 2.2 Dimostrazione della formula combinatoria

### Forme fattoriali

- 3.1 Prima forma fattoriale
- 3.2 Seconda forma fattoriale

## Note finali

## Seconda forma fattoriale

I monomi nella forma combinatoria si possono raccogliere parzialmente, per dare

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{m=1}^n \frac{f^{(m)}(g(x))}{m!} \sum \binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} \prod_{i=1}^m g^{(j_i)}(x)$$

dove la seconda somma si esegue per tutte le scelte di m-uple di interi positivi  $(j_1, \dots, j_m)$  che soddisfano il vincolo

$$j_1 + \dots + j_m = n.$$

## Dimostrazione

Questa formula si ottiene raccogliendo termini della formula combinatoria in due tempi successivi.

Prima raccogliamo insieme tutte le partizioni  $\pi$  con  $|\pi| = m$ ; dopo fissiamo un vettore di interi positivi  $j_1, \dots, j_m$  che soddisfano  $j_1 + \dots + j_m = n$ ; scriviamo  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  e contiamo quante sono le partizioni per cui  $|B_1| = j_1 \dots |B_m| = j_m$ .

Questo è un problema ben noto nella teoria della combinatoria <sup>2</sup> risolto dai **coefficienti multinomiali**

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

Alla fine dividiamo per  $m!$  perché non ci interessa l'ordine in cui si dispongono le parti. □

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_coefficient)

## Dimostrazione

Questa formula si ottiene raccogliendo termini della formula combinatoria in due tempi successivi.

Prima raccogliamo insieme tutte le partizioni  $\pi$  con  $|\pi| = m$ ; dopo fissiamo un vettore di interi positivi  $j_1, \dots, j_m$  che soddisfano  $j_1 + \dots + j_m = n$ ; scriviamo  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  e contiamo quante sono le partizioni per cui  $|B_1| = j_1 \dots |B_m| = j_m$ .

Questo è un problema ben noto nella teoria della combinatoria <sup>2</sup> risolto dai **coefficienti multinomiali**

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

Alla fine dividiamo per  $m!$  perché non ci interessa l'ordine in cui si dispongono le parti. □

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_coefficient)

## Dimostrazione

Questa formula si ottiene raccogliendo termini della formula combinatoria in due tempi successivi.

Prima raccogliamo insieme tutte le partizioni  $\pi$  con  $|\pi| = m$ ; dopo fissiamo un vettore di interi positivi  $j_1, \dots, j_m$  che soddisfano

$j_1 + \dots + j_m = n$ ; scriviamo  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  e contiamo quante sono le partizioni per cui  $|B_1| = j_1 \dots |B_m| = j_m$ .

Questo è un problema ben noto nella teoria della combinatoria <sup>2</sup> risolto dai **coefficienti multinomiali**

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

Alla fine dividiamo per  $m!$  perché non ci interessa l'ordine in cui si dispongono le parti. □

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_coefficient)

## Dimostrazione

Questa formula si ottiene raccogliendo termini della formula combinatoria in due tempi successivi.

Prima raccogliamo insieme tutte le partizioni  $\pi$  con  $|\pi| = m$ ; dopo fissiamo un vettore di interi positivi  $j_1, \dots, j_m$  che soddisfano  $j_1 + \dots + j_m = n$ ; scriviamo  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  e contiamo quante sono le partizioni per cui  $|B_1| = j_1 \dots |B_m| = j_m$ .

Questo è un problema ben noto nella teoria della combinatoria <sup>2</sup> risolto dai **coefficienti multinomiali**

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

Alla fine dividiamo per  $m!$  perché non ci interessa l'ordine in cui si dispongono le parti. □

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_coefficient)



## Dimostrazione

Questa formula si ottiene raccogliendo termini della formula combinatoria in due tempi successivi.

Prima raccogliamo insieme tutte le partizioni  $\pi$  con  $|\pi| = m$ ; dopo fissiamo un vettore di interi positivi  $j_1, \dots, j_m$  che soddisfano  $j_1 + \dots + j_m = n$ ; scriviamo  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  e contiamo quante sono le partizioni per cui  $|B_1| = j_1 \dots |B_m| = j_m$ .

Questo è un problema ben noto nella teoria della combinatoria <sup>2</sup> risolto dai **coefficienti multinomiali**

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

Alla fine dividiamo per  $m!$  perché non ci interessa l'ordine in cui si dispongono le parti. □

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_coefficient)

## Dimostrazione

Questa formula si ottiene raccogliendo termini della formula combinatoria in due tempi successivi.

Prima raccogliamo insieme tutte le partizioni  $\pi$  con  $|\pi| = m$ ; dopo fissiamo un vettore di interi positivi  $j_1, \dots, j_m$  che soddisfano  $j_1 + \dots + j_m = n$ ; scriviamo  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  e contiamo quante sono le partizioni per cui  $|B_1| = j_1 \dots |B_m| = j_m$ .

Questo è un problema ben noto nella teoria della combinatoria <sup>2</sup> risolto dai **coefficienti multinomiali**

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_m!}.$$

Alla fine dividiamo per  $m!$  perché non ci interessa l'ordine in cui si dispongono le parti. □

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_coefficient)

## Coefficiente nell'esempio

Il monomio nell'esempio era  $f^{(4)}(g(x))g'(x)g'(x)g''(x)g^{(4)}(x)$ . Questo si ottiene ponendo  $n = 8, m = 4$  e considerando tutte le quadruple  $j_1, j_2, j_3, j_4$  in cui compaiano i numeri 1, 1, 2, 4 (notiamo che si ha  $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = n = 8$ ). Vi sono 12 tali quadruple, elencate qui a destra; dunque il monomio viene generato 12 volte nella formula. Ne segue che il coefficiente del monomio è

$$12 \frac{1}{m!} \binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = 12 \frac{1}{4!} \frac{8!}{1! 1! 2! 4!} = 420$$

$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_4$
1	1	2	4
1	2	1	4
2	1	1	4
1	2	4	1
2	1	4	1
2	4	1	1
1	1	4	2
1	4	1	2
4	1	1	2
1	4	2	1
4	1	2	1
4	2	1	1

Introduzione

Forma combinatoria

Forme fattoriali

**Note finali**

Queste note sono disponibili in Italiano e in Inglese, sia nel formato  *trasparenze* (che state leggendo) sia nel formato  *appunti* .

# Ringraziamenti

L'autore ringrazia il Politecnico di Torino per l'invito a parlare al convegno *L'eredità matematica e civile di Francesco Faà di Bruno*, 2017.

<http://calvino.polito.it/~nicola/convegnofaa/faadibruno>

Alcune formule e idee sono tratte da

[http://en.wikipedia.org/wiki/Faa\\_di\\_Bruno\\_formula](http://en.wikipedia.org/wiki/Faa_di_Bruno_formula)

# Licenza

Questo documento può essere usato e ridistribuito secondo i termini della licenza Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0 Unported License.