Una presentazione intuitiva della formula di Faà di Bruno

A. Mennucci
Scuola Normale Superiore, Pisa

Convegno
L'eredità matematica e civile di Francesco Faà di Bruno
Politecnico di Torino
22 settembre 2017

Indice

1 Introduzione

Supponiamo che $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siano funzioni che ammettono n derivate:
la formula di Faà di Bruno elenca i termini dell'espansione della derivata n-esima

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = (f \circ g)^{(n)}(x) \ .$$

(A sinistra abbiamo usato la notazione di Leibniz per le derivate, a destra la notazione di Lagrange — useremo principalmente quest'ultima).

Per calcolare queste derivate si usano due formule antecedenti già note nel calcolo.

- Una è la *regola della catena* per la derivata di una funzione composta

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x) \ .$$

  Come si vede, questa genera un "monomio" che è il prodotto di due funzioni.

- L'altra è la *regola del prodotto* per la derivata del prodotto di funzioni, che presentiamo nel caso di tre funzioni derivabili $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

  $$\frac{d}{dx}\Big(a(x)b(x)c(x)\Big) = a'(x)b(x)c(x) + a(x)b'(x)c(x) + a(x)b(x)c'(x) \ .$$

  Come si vede, questa genera una somma di "monomi", e in ciascuno si deriva uno dei fattori del prodotto dato.

(Entrambe le formule compaiono nei lavori di Leibniz, circa 1680).

Per calcolare la derivata n-esima sarà necessario applicare le precedenti regole più e più volte. Si può immaginare che questo darà luogo a espressioni molto lunghe e complesse, in quanto la prima regola aumenta il numero dei fattori nei monomi, e la seconda aumenta il numero di monomi nella somma.

Casi $n = 1, 2, 3$

Iniziamo con un esempio. Calcoliamo le derivate per $n = 1, 2, 3$. La derivata prima è una diretta applicazione della regola della catena.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad .$$

La derivata seconda si ottiene applicando la regola del prodotto e poi la derivata a catena.

$$\begin{aligned}
(f \circ g)''(x) \quad &= \quad \Big(f'(g(x))g'(x)\Big)' = \\
&\overset{\text{prodotto}}{=} \quad \Big(f'(g(x))\Big)' g'(x) + f'(g(x))g''(x) = \\
&\overset{\text{catena}}{=} \quad f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \quad .
\end{aligned}$$

Vediamo nel dettaglio il passaggio dalla derivata seconda alla terza. Deriviamo un'altra volta la seconda derivata

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \quad .$$

$$\begin{tikzcd}
(f\circ g)'''(x) = & \Big(f''(g(x))g'(x)^2\Big)' + \arrow[dl, "\text{prodotto}"'] \arrow[d, bend right] \arrow[d, bend left, "\text{prodotto+} \atop \text{+raccogli}"] & \Big(f'(g(x))g''(x)\Big)' = \arrow[d, "\text{prodotto}"] \arrow[dr, "\text{prodotto}"] & \\
\Big(f''(g(x))\Big)' g'(x)^2 + \arrow[d, "\text{catena}"] & 2f''(g(x))g'(x)g''(x) + \arrow[d, "\text{copia}"] & \Big(f'(g(x))\Big)' g''(x) + \arrow[d, "\text{catena}"] & f'(g(x))g'''(x) = \arrow[d, "\text{copia}"] \\
f'''(g(x))g'(x)\, g'(x)^2 + \arrow[d, "\text{copia}"] & 2f''(g(x))g'(x)g''(x) + \arrow[d, "\text{raccogli}"] & f''(g(x))g'(x)g''(x) + \arrow[dl, "\text{raccogli}"] & f'(g(x))g'''(x) = \arrow[dl, "\text{copia}"] \\
f'''(g(x))g'(x)\, g'(x)^2 + & 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + & f'(g(x))g'''(x) &
\end{tikzcd}$$

Notate come abbiamo un **albero di derivazioni**.

In sintesi le derivate per $n = 1, 2, 3, 4$ sono:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\
(f \circ g)''(x) &= f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \\
(f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x))g'(x)^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + \\
&+ \; f'(g(x))g'''(x) \\
(f \circ g)''''(x) &= f''''(g(x))g'(x)^4 + 6f'''(g(x))g''(x)g'(x)^2 \\
&+ \; 3f''(g(x))g''(x)^2 + 4f''(g(x))g'''(x)g'(x) \\
&+ \; f'(g(x))g''''(x).
\end{aligned}$$

Vediamo che l'espansione di $\frac{d^n}{dx^n} f(g(x))$ è sempre la somma di molti monomi della forma $af^{(m)}(g(x))g'(x)^{i_1} \dots g^{(n)}(x)^{i_n}$ per opportuni coefficienti interi $a, n, m, i_1, \dots i_n$.

La formula di Faà di Bruno permette di enumerare tutti questi monomi. La formula si esprime in diverse forme.

- La forma combinatoria. Questa è la forma più semplice, ma anche la più ridondante perché i monomi non sono mai raccolti (cioè tutti i coefficienti sono 1).
- Forme fattoriali, che raccolgono insieme monomi simili.

2 Forma combinatoria

Fattoriale

I numeri interi positivi sono $1, 2, 3, 4, 5, \dots$.

Dato n numero intero positivo, il prodotto dei primi n numeri è il **fattoriale** indicato come $\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.}$

Il numero $n!$ è il numero di maniere diverse in cui si possono mettere in fila n oggetti diversi.

(Per convenzione se $n = 0$ allora $n! = 1$).

Cardinalità

Dato un insieme A allora $|A|$ denota il numero di elementi contenuti nell'insieme A. (In gergo matematico si dice che $|A|$ è la **cardinalità** di A)

Esempi. Se $A = \{1, 44, 4, 133\}$ allora $|A| = 4$. Se n è un numero intero positivo e $A = \{1, 2, \dots, n\}$ è l'insieme dei primi n numeri allora $|A| = n$.

Partizioni

Consideriamo l'insieme $A = \{1, 2, \dots, n\}$ dei primi n numeri. Una **partizione** di questo insieme è una famiglia di sottoinsiemi (non vuoti) ognuno dei quali contiene un elemento di A, senza tralasciare nessun elemento di A.

Esempio. Dato $A = \{1, 2, 3, 4\}$ allora $\{\{2\}, \{4\}, \{3, 1\}\}$ è una sua partizione.

Chiameremo P_n l'insieme di tutte le partizioni di $\{1, 2, \dots, n\}$. (È un insieme di insiemi di insiemi di numeri!)

Esempio. Vi sono 5 diverse partizioni di $\{1,2,3\}$, e sono

$$P_3 = \{ \quad \{\{1,2,3\}\}, \quad \{\{1,2\},\{3\}\}, \quad \{\{1\},\{2,3\}\}, \\ \{\{1,3\},\{2\}\}, \quad \{\{1\},\{2\},\{3\}\}, \quad \}$$

Notate che $|P_3| = 5$.

Forma combinatoria

La formula di Faà di Bruno ha una forma combinatoria:

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) \tag{1}$$

dove

- $\boxed{\sum_{\pi \in P_n}}$ significa *sommare quanto segue al variare della scelta di una partizione* π *fra tutte le partizioni* P_n *di* $\{1,...,n\}$,
- $\boxed{\prod_{B \in \pi}}$ significa *moltiplicare quanto segue al variare della scelta di* B *fra le "parti" della partizione* π ; e inoltre
- $|\pi|$ è il numero di parti in π mentre $|B|$ è il numero di numeri nella parte B.

2.1 Esempio per spiegare la forma combinatoria

Vediamo ora un esempio per spiegare come ogni possibile derivazione sia associata a una partizione.

Innanzitutto notiamo che ogni partizione si può univocamente rappresentare ordinando i numeri in ogni parte, e le parti per il loro minimo elemento. Esempio ($n = 8$)

$$\begin{array}{lcl} \{\{5,7\},\{2\},\{6\},\{3,1,8,4\}\} & \to & \{\{1,3,4,8\},\{2\},\{5,7\},\{6\}\} \\ \{\{8\},\{3\},\{7,1\},\{4\},\{2,5\},\{6\}\} & \to & \{\{1,7\},\{2,5\},\{3\},\{4\},\{6\},\{8\}\} \end{array}$$

Noi ora deriviamo $f(g(x))$ per 8 volte, seguendo lo schema $\{\{1,3,4,8\},\{2\},\{5,7\},\{6\}\}$ giù per l'albero delle derivazioni.

- Il primo passo è obbligato

  $f(g(x)) \to g'(x)f'(g(x))$

  e gli associamo

  $\{\{1, \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots.$
- Ora abbiamo due termini, decidiamo di derivare il secondo:

  $g'(x)f'(g(x)) \to g'(x)g'(x)f''(g(x))$

  e gli associamo

  $\{\{1, \ldots \quad \{2, \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
- Ora abbiamo tre termini, decidiamo di derivare il primo:

  $g'(x)g'(x)f''(g(x)) \to g''(x)g'(x)f''(g(x))$

  e gli associamo

  $\{\{1,3, \ldots \quad \{2, \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

- Abbiamo di nuovo tre termini, decidiamo di derivare nuovamente il primo:
  $g''(x)g'(x)f''(g(x)) \to g'''(x)g'(x)f''(g(x))$
  e gli associamo
  $\{\{1,3,4,\dots \quad \{2,\dots \quad \dots \quad \dots$
- Abbiamo di nuovo tre termini, decidiamo di derivare il terzo:
  $g'''(x)g'(x)f''(g(x)) \to g'''(x)g'(x)g'(x)f'''(g(x))$
  e gli associamo
  $\{\{1,3,4,\dots \quad \{2,\dots \quad \{5,\dots \quad \dots$
- Ora abbiamo quattro termini, decidiamo di derivare il quarto:
  $g'''(x)g'(x)g'(x)f'''(g(x)) \to g'''(x)g'(x)g'(x)g'(x)f^{(4)}(g(x))$
  e gli associamo
  $\{\{1,3,4,\dots \quad \{2,\dots \quad \{5,\dots \quad \{6,\dots$
- Ora abbiamo cinque termini, decidiamo di derivare il terzo:
  $g'''(x)g'(x)g'(x)g'(x)f^{(4)}(g(x)) \to g'''(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x))$
  e gli associamo
  $\{\{1,3,4,\dots \quad \{2,\dots \quad \{5,7,\dots \quad \{6,\dots$
- Ora abbiamo cinque termini, decidiamo di derivare il primo:
  $g'''(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x)) \to g^{(4)}(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x))$
  e gli associamo
  $\{\{1,3,4,8\dots \quad \{2,\dots \quad \{5,7,\dots \quad \{6,\dots$

Abbiamo così ottenuto il monomio
$g^{(4)}(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x))$
che è associato alla partizione
$\{\{1,3,4,8\}, \quad \{2\}, \quad \{5,7\}, \quad \{6\}\}$

Ridondanza

Vediamo inoltre che questa forma è molto ridondante. Per esempio per $n = 4$ il monomio $g''(x)g''(x)f''(g(x)) = g''(x)^2 f''(g(x))$ appare tre volte, associato alle partizioni
$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$
$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$
$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$

Similmente il monomio
$g^{(4)}(x)g'(x)g''(x)g'(x)f^{(4)}(g(x)) = f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x)$
ottenuto nell'esempio precedente può essere ottenuto da 420 diverse partizioni in P_8 (Questo sarà dimostrato in seguito).

Vedremo che nella prossima sezione che la *forma fattoriale* riduce la ridondanza (ma allunga la formula...).

2.2 Dimostrazione della formula combinatoria

Ora dimostriamo la validità della formula combinatoria, usando l'induzione. Il caso $n = 1$ è verò perché P_1 contiene una sola partizione, che è $\pi = \{\{1\}\}$, che è associata a $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

Per completare la dimostrazione, assumiamo che

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x)$$

sia valida, e deriviamo ancora una volta.

Questo produce due termini

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{(n+1)}(x) &= \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|+1)}(g(x))g'(x) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) + \\ &+ \sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \sum_{\hat{B} \in \pi} \prod_{B \in \pi} g^{(|B|+\delta_{B,\hat{B}})}(x)\end{aligned}$$

dove $\delta_{B,\hat{B}}$ è il **delta di Kronecker** [1]

$$\delta_{A,B} = \begin{cases} 1, & \text{if } A = B \\ 0, & \text{if } A \neq B \end{cases}$$

La domanda ora è: come si generano le partizioni in $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$ partendo dalle partizioni in $\pi \in P_n$.

1. Il primo modo è decidere che il singoletto $\{n+1\}$ è una parte di $\tilde{\pi}$, cosicché $\tilde{\pi} = \pi \cup \{\{n+1\}\}$.
   Esempio, partiamo da
   $\pi = \{\{1,4\},\{2,3\}\} \in P_4$ *e costruiamo*
   $\tilde{\pi} = \{\{1,4\},\{2,3\},\{5\}\} \in P_5$.

2. Il secondo modo è di decidere che $n+1$ è un elemento di una parte $\tilde{B}$ in $\tilde{\pi}$, e associare $\tilde{B}$ a una parte $\hat{B}$ in π, tramite $\widetilde{B} = \hat{B} \cup \{n+1\}$.
   Esempio, partiamo da
   $\pi = \{\{1,4\},\{2,3\}\} \in P_4$ *e costruiamo*
   $\widetilde{\pi} = \{\{1,4,5\},\{2,3\}\} \in P_5$ *quando* $\hat{B} = \{1,4\}, \widetilde{B} = \{1,4,5\}$
   $\widetilde{\pi} = \{\{1,4\},\{2,3,5\}\} \in P_5$ *quando* $\hat{B} = \{2,3\}, \widetilde{B} = \{2,3,5\}$

Il metodo sopra indicato genera ciascuna $\tilde{\pi} \in P_{n+1}$ partendo da $\pi \in P_n$ e, nel secondo caso, scegliendo $\hat{B} \in \pi$.

La prima parte di $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$ è associata al primo metodo generativo

$$\begin{aligned}&\sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|+1)}(g(x))g'(x) \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}(x) = \\ &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \in \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\widetilde{B}|)}(x) \end{aligned} \tag{2}$$

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_delta

infatti ciascun $\tilde{\pi}$ soddisfa $\{n+1\} \in \tilde{\pi}$ e $|\tilde{\pi}| = |\pi|+1$, e inoltre il caso $\tilde{B} = \{n+1\}$ genera il termine extra $g'(x)$ che è a sinistra.

La seconda parte di $(f \circ g)^{(n+1)}(x)$ è associata al secondo metodo generativo

$$\begin{aligned} &\sum_{\pi \in P_n} f^{(|\pi|)}(g(x)) \sum_{\hat{B} \in \pi} \prod_{B \in \pi} g^{(|B| + \delta_{B,\hat{B}})}(x) = \\ &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \notin \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned} \tag{3}$$

infatti

- tutte tali $\tilde{\pi}$ soddisfano $\{n+1\} \notin \tilde{\pi}$ e $|\tilde{\pi}| = |\pi|$, e ancora
- vi sono *tante* $\tilde{\pi}$ *associate a* π *quante sono le* $\hat{B} \in \pi$ *e* ,
- quando $\hat{B} = B$, abbiamo $\delta_{B,\hat{B}} = 1$ *e* $|\tilde{B}| = |B| + 1$, laddove
- quando $\hat{B} \neq B$, abbiamo $\delta_{B,\hat{B}} = 0$ *e* $|\tilde{B}| = |B|$.

Sommando le precedenti identità (2) e (3) concludiamo che

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{(n+1)}(x) &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \in \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) + \\ &\quad + \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}, \{n+1\} \notin \tilde{\pi}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) = \\ &= \sum_{\tilde{\pi} \in P_{n+1}} f^{(|\tilde{\pi}|)}(g(x)) \prod_{\tilde{B} \in \tilde{\pi}} g^{(|\tilde{B}|)}(x) \end{aligned}$$

che è la formula per $n+1$. $\square$

3 Forme fattoriali

Le forme fattoriali raccolgono insieme i monomi simili nella forma combinatoria; l'espressione della formula è più complessa, ma più utile in talune applicazioni.

3.1 Prima forma fattoriale

Forma fattoriale

I monomi nella forma combinatoria (1) possono essere raccolti per dare

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) &= \sum \frac{n!}{m_1!\, 1!^{m_1}\, m_2!\, 2!^{m_2}\, \cdots\, m_n!\, n!^{m_n}} \cdot \\ &\quad \cdot f^{(m_1 + \cdots + m_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^{n} \left(g^{(j)}(x)\right)^{m_j} \end{aligned} \tag{4}$$

dove la somma si effettua su tutte le scelte nonnegative di interi $(m_1, \ldots, m_n)$ che soddisfano il vincolo

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \cdots + n \cdot m_n = n.$$

I monomi

$$f^{(m_1+\cdots+m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(g^{(j)}(x)\right)^{m_j}$$

che compaiono nella formula (4) si possono scrivere anche come

$$f^{(m_1+\cdots+m_n)}(g(x))\,(g'(x))^{m_1}\,(g''(x))^{m_2} \cdots \left(g^{(n)}(x)\right)^{m_n} \tag{5}$$

Si vede chiaramente che ogni derivata di g compare una sola volta, con un esponente variabile; dunque i monomi non sono ripetuti in questa formula.

Dunque il termine

$$\frac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\,m_2!\,2!^{m_2}\,\cdots\,m_n!\,n!^{m_n}}$$

moltiplicativo è il coefficiente intero del monomio.

Alle volte la formula (4) viene scritta nella forma "mnemonica":

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum \frac{n!}{m_1!\,m_2!\,\cdots\,m_n!} \cdot f^{(m_1+\cdots+m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!}\right)^{m_j} .$$

La formula presentata da Francesco Faà di Bruno nel 1855 negli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* era scritta in questo modo.

Come si collega questa formula (4) con la precedente formula combinatoria (1)?

La firma della partizione

Prendiamo una partizione $\pi \in P_n$. Definiamo l'intero m_j come il numero di parti $A \in \pi$ tali che $|A| = j$. Diremo che questi numeri $m_1, m_2, \ldots m_n$ sono la **firma** della partizione π.

Ovviamente per ciascuna partizione, si ha $|\pi| = (m_1 + \cdots + m_n)$;
inoltre $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \cdots + n \cdot m_n = n$ dato che π è una partizione di $\{1, \ldots, n\}$.

Se una partizione ha firma $m_1, m_2, \ldots m_n$ allora genera il monomio visto in (5).

Firma nell'esempio

Seguiamo di nuovo la traccia del primo esempio.

Nel primo esempio noi calcolammo un termine della derivata ottava di $f(g(x))$ seguendo la partizione $\pi = \{\{1,3,4,8\},\{2\},\{5,7\},\{6\}\}$,
e ottenemmo il monomio

$$f^{(4)}(g(x))g'(x)^2 g''(x) g^{(4)}(x) \quad .$$

In questa π noi abbiamo
$m_1 = 2$ singoletti, cioè $\{2\},\{6\}$
$m_2 = 1$ coppie, cioè $\{5,7\}$
$m_3 = 0$ triple,
$m_4 = 1$ quadruple, cioè $\{1,3,4,8\}$,
e dopo $m_5 = \ldots = m_8 = 0$.

Costruzione di partizioni

Sia ora data una firma.

Come possiamo costruire ogni partizione con questa stessa firma?

Usiamo la firma data dall'esempio $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $m_3 = 0$, $m_4 = 1$, $m_5 = \ldots = m_8 = 0$ per mostrare il meccanismo.

Prepariamo lo scheletro

$$\{\{\ \}, \{\ \}, \{\ ,\ \}, \{\ ,\ ,\ ,\ \}\}$$

Poi scriviamo un ordinamento di $n = 8$ numeri e la inseriamo nello scheletro.

$$\begin{array}{cccccccccc} & 6, & 2 & 5 & 7 & 8 & 4 & 1 & 3 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \{ & \{6\}, & \{2\}, & \{5, & 7\}, & \{8, & 4, & 1, & 3\} & \} \end{array}$$

Questa operazione si può fare in $n! = 8!$ maniere diverse.

Questa partizione però non è univocamente ottenuta.

Possiamo infatti scambiare di posto le parti con lo stesso numero di elementi.

$$\{\ \ \{6\},\ \ \{2\},\ \ \{5,7\},\ \ \{8,4,1,3\}\ \ \}$$

$$\{\ \ \{2\},\ \ \{6\},\ \ \{5,7\},\ \ \{8,4,1,3\}\ \ \}$$

Questo si può fare in $m_1!m_2!\ldots m_n!$ maniere.

Possiamo inoltre scambiare di posto i numeri nella stessa parte.

$$\{\ \ \{6\},\ \ \{2\},\ \ \{5,7\},\ \ \{8,\ \ 4,\ \ 1,\ \ 3\}\ \ \}$$

$$\{\ \ \{6\},\ \ \{2\},\ \ \{5,7\},\ \ \{3,\ \ 4,\ \ 1,\ \ 8\}\ \ \}$$

Questo si può fare in

$$1!^{m_1}\ 2!^{m_2}\ \cdots\ n!^{m_n}$$

maniere diverse. (Infatti ad esempio in una tripla i numeri si possono riordinare in $3! = 6$ maniere; se vi sono m_3 triple allora in totale vi sono $(3!)^{m_3}$ riordinamenti dei numeri nelle triple).

Dimostrazione

Il ragionamento che abbiamo esemplificato dimostra che la formula di Faà di Bruno (4) segue dalla formula combinatoria (1) .

Abbiamo visto che, data una firma $m_1, m_2, \ldots m_m$, possiamo riempire lo scheletro in $n!$ maniere, ma così facendo otteniamo più volte le stesse partizioni,dunque dobbiamo dividere $n!$ per

$$m_1!m_2!\ldots m_n! \cdot 1!^{m_1}\ 2!^{m_2}\ \cdots\ n!^{m_n} \quad .$$

Abbiamo così mostrato che vi sono esattamente

$$\frac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\,m_2!\,2!^{m_2}\ \cdots\ m_n!\,n!^{m_n}}$$

partizioni $\pi \in P_n$ con firma

$$m_1, m_2, \dots m_m \quad .$$

Tutte le partizioni con la stessa firma generano lo stesso monomio

$$f^{(m_1+\cdots+m_n)}(g(x))\,(g'(x))^{m_1}\,(g''(x))^{m_2}\cdots\left(g^{(n)}(x)\right)^{m_n}.$$

Dunque se raccogliamo tutti i monomi ripetuti nella forma combinatoria il coefficiente intero del monomio precedente sarà esattamente

$$\frac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\,m_2!\,2!^{m_2}\,\cdots\,m_n!\,n!^{m_n}} \qquad \square$$

Coefficiente nell'esempio

Così vi sono

$$\frac{n!}{m_1!\,1!^{m_1}\;m_2!\,2!^{m_2}\cdots m_n!\,n!^{m_n}} = \frac{8!}{2!\,1!^2\;\;1!\,2!^1\;\;0!\,3!^0\;\;1!\,4!^1} = 420$$

diverse partizioni in P_8 che generano il monomio $f^{(4)}(g(x))g'(x)^2g''(x)g^{(4)}(x)$.
Questo significa che il coefficiente di questo monomio è 420.
Con questo esempio possiamo apprezzare l'efficacia della formula di Faà di Bruno, che ci permette di calcolare i coefficienti dei monomi in maniera "semplice".

3.2 Seconda forma fattoriale

Seconda forma fattoriale

I monomi nella forma combinatoria si possono raccogliere parzialmente, per dare

$$\frac{d^n}{dx^n}f(g(x)) = \sum_{m=1}^{n}\frac{f^{(m)}(g(x))}{m!}\sum\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m}\prod_{i=1}^{m}g^{(j_i)}(x)$$

dove la seconda somma si esegue per tutte le scelte di m-uple di interi positivi $(j_1, \dots, j_m)$ che soddisfano il vincolo

$$j_1 + \cdots + j_m = n.$$

Dimostrazione

Questa formula si ottiene raccogliendo termini della formula combinatoria in due tempi successivi.

Prima raccogliamo insieme tutte le partizioni π con $|\pi| = m$; dopo fissiamo un vettore di interi positivi $j_1, \dots j_m$ che soddisfano $j_1 + \cdots + j_m = n$; scriviamo $\pi = \{B_1, \dots B_m\}$ e contiamo quante sono le partizioni per cui $|B_1| = j_1 \dots |B_m| = j_m$.

Questo è un problema ben noto nella teoria della combinatoria [2] risolto dai **coefficienti multinomiali**

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} = \frac{n!}{j_1!\,j_2!\,\cdots\,j_m!}\ .$$

Alla fine dividiamo per $m!$ perché non ci interessa l'ordine in cui si dispongono le parti. $\square$

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_coefficient`

Coefficiente nell'esempio

Il monomio nell'esempio era $f^{(4)}(g(x))g'(x)g'(x)g''(x)g^{(4)}(x)$. Questo si ottiene ponendo $n = 8, m = 4$ e considerando tutte le quadruple j_1, j_2, j_3, j_4 in cui compaiano i numeri $1, 1, 2, 4$ (notiamo che si ha $j_1+j_2+j_3+j_4 = n = 8$). Vi sono 12 tali quadruple, elencate qui a destra; dunque il monomio viene generato 12 volte nella formula. Ne segue che il coefficiente del monomio è

$$12\frac{1}{m!}\binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_m} = 12\frac{1}{4!}\frac{8!}{1!\,1!\,2!\,4!} = 420 \quad .$$

j_1	j_2	j_3	j_4
1	1	2	4
1	2	1	4
2	1	1	4
1	2	4	1
2	1	4	1
2	4	1	1
1	1	4	2
1	4	1	2
4	1	1	2
1	4	2	1
4	1	2	1
4	2	1	1

4 Note finali

Queste note sono disponibili in Italiano e in Inglese, sia nel formato *trasparenze* sia nel formato *appunti* (che state leggendo).

Ringraziamenti

L'autore ringrazia il Politecnico di Torino per l'invito a parlare al convegno *L'eredità matematica e civile di Francesco Faà di Bruno*, 2017.
`http://calvino.polito.it/~nicola/convegnofaa/faadibruno`

Alcune formule e idee sono tratte da `http://en.wikipedia.org/wiki/Faa_di_Bruno_formula`

Licenza