150 anni di invarianti e funzioni simmetriche

Claudio Procesi

Torino,

22–09–2017

Preludio

Vi sono due origini della teoria.

Il problema della risolubilità delle equazioni per radicali.

L'assioma delle parallele e le geometrie non Euclidee.

Il problema della risolubilità delle equazioni per radicali.

Lagrange osserva che se $f(x) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n$ è un polinomio e $x_1, \ldots, x_n$ le sue radici si ha

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n = a_0\prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$$

e quindi, assumendo come si può fare $a_0 = 1$ i coefficienti

$$(-1)^i a_i = \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_i \leq n} x_{a_1}x_{a_2}\ldots x_{a_i}$$

Funzioni simmetriche

Le funzioni $(-1)^i a_i := e_i$ sono *simmetriche* nelle variabili x_i

definizione

Un polinomio nelle variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *invariante per permutazione di queste variabili, è detto* polinomio simmetrico.
Le funzioni e_i *sono le*

funzioni simmetriche elementari.

Le permutazioni

Le permutazioni di n elementi formano un gruppo, detto *gruppo simmetrico* e denotato con S_n.
Tale gruppo ha $n! = n(n-1)(n-2) \ldots \cdot 2$ elementi.

Il teorema fondamentale

Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ è un polinomio simmetrico allora si può (con un semplice algoritmo) scrivere come polinomio nelle funzioni elementari e_i

Esempio $n = 2$:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$= e_1^2 - 2e_2$$

$n = 3$:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$$
$$e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3.$$

In generale le somme di potenze si scrivono con formule dovute a Newton.

Il teorema fondamentale

L'uso di questo Teorema

Se $x_1, \ldots, x_n$ sono le radici di un polinomio $f(t)$ e vogliamo scrivere una condizione intrinseca, la possiamo usualmente esprimere con un polinomio simmetrico. Ad esempio $\prod_{i \neq j}(x_i - x_j) \neq 0$ è la condizione che le radici siano tutte distinte, si può scrivere come polinomio nei coefficienti di $f(t)$ senza dover calcolare le radici.

Il polinomio quadratico $ax^2 + bx + c$ ha discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Il polinomio cubico $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ha discriminante $\Delta = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$.

Il risultante

L'uso di questo Teorema II

Se $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_m$ sono le radici di due polinomi $f(t), g(t)$ ad esempio $\prod_{i,j}(x_i - y_j) = 0$ è la condizione che due polinomi abbiano una radice in comune, si può scrivere come polinomio simmetrico sia nelle x che nelle y nei coefficienti di $f(t)$ senza dover calcolare le radici.

Il risultante dovuto a Sylvester si può esprimere come determinante.

$$\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\
a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & a_1 & \vdots & \vdots & \cdots & b_1 \\
a_d & a_{d-1} & \cdots & \vdots & b_e & b_{e-1} & \cdots & \vdots \\
0 & a_d & \ddots & \vdots & 0 & b_e & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_{d-1} & \vdots & \vdots & \ddots & b_{e-1} \\
0 & 0 & \cdots & a_d & 0 & 0 & \cdots & b_e
\end{vmatrix},$$

$$f(t) = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \ldots + a_d$$

$$g(t) = b_0 t^e + b_1 t^{e-1} + \ldots + b_e$$

Lagrange, Ruffini, Abel, Galois

In realtà il legame fra queste idee ed il problema della risolubilità per radicali è indiretto.

Si lega lal fatto che il gruppo simmetrico S_n per $n = 2, 3, 4$ è speciale *detto risolubile* e quindi ci sono delle *simmetrie intermedie* che corrispondono ai passi delle formule per radicali.

Questa nella sua forma compiuta è la *teoria di Galois*.

Nella prima parte di questo libro l'autore considera come fondamentali le seguenti funzioni simmetriche:
Si prende un monomio
$x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n}, \;\; h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n$ e si sommano tutti i monomi ottenuti da questo per permutazione delle variabili:

$$x_1^3 x_2^2 x_3^2 + x_2^3 x_1^2 x_3^2 + x_3^3 x_1^2 x_2^2.$$

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1 + x_1^3 x_3 + x_3^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_2.$$

I monomi sono permutati dal gruppo simmetrico

Quindi è evidente che un polinomio simmetrico si *decompone* in modo naturale come somma delle precedenti funzioni simmetriche.

Il primo capitolo del libro discute numerose formule, spesso determinantali, per queste funzioni.

Dal punto di vista attuale queste *non sono* le funzioni fondamentali, quelle fondamentali si ottengono dalle analoghe antisimmetriche, e.g:

$$A_{3,2} = x_1^3x_2 - x_2^3x_1 - x_1^3x_3 - x_3^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_2.$$

$$V = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

$$= x_1^2x_2 - x_2^2x_1 - x_1^2x_3 - x_3^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2$$

$$A = (x_1 + x_2 + x_3)V$$

Le funzioni di Schur

Si prende un monomio $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n}$, $h_1 > h_2 > \dots > h_n$ e si sommano tutti i monomi ottenuti da questo per permutazione delle variabili con il segno ϵ_σ della permutazione. Si ottiene un polinomio antisimmetrico

$A_{h_1>h_2>\dots>h_n}$ è divisibile per il polinomio di Vandermonde $V(x_1,\dots,x_n) := \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.
Il quoziente si chiama *funzione di Schur* (anche se risale a Jacobi e Cauchy).

$$A_{h_1>h_2>\dots>h_n} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma x_{\sigma(1)}^{h_1} x_{\sigma(2)}^{h_2} \dots x_{\sigma(n)}^{h_n}$$

Le funzioni di Schur

Da $h_1 > h_2 > \ldots > h_n \geq 0$ deduciamo la sequenza $\lambda := \{\lambda_i := h_i - n + i\}$ con

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Si considere λ come una partizione di $\sum_i \lambda_i$ si pone

$$S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) := A_{h_1 > h_2 > \ldots > h_n} / V(x_1, \ldots, x_n).$$

Questo è un polinomio simmetrico di grado $\sum_i \lambda_i$, *funzione di Schur*.

I. Schur

Per capire il significato di queste funzioni dobbiamo arrivare al ventesimo secolo ed alla Dissertazione di Schur.

I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Diss. Berlin (1901).

Le funzioni di Schur sono i caratteri irriducibili del gruppo lineare

Inizio di una analisi di Fourier non abeliana.

Siamo all'inizio di una rivoluzione lo sviluppo della Teoria delle rappresentazioni

Si tratta di una teoria che ha avuto una gestazione nella teoria degli invarianti

La Teoria degli invarianti

Inizia con questi due lavori:

THE CAMBRIDGE

MATHEMATICAL JOURNAL.

VOL. III.] NOVEMBER, 1841. [No. XIII.

I.—EXPOSITION OF A GENERAL THEORY OF LINEAR TRANSFORMATIONS. PART I.

By GEORGE BOOLE.

1. THE transformation of homogeneous functions by linear substitutions, is an important and oft-recurring problem of analysis. In the *Mécanique Analytique* of Lagrange, it occupies a very prominent place, and it has been made the subject of a special memoir by Laplace. More recently it has engaged the attention of Lebesgue and Jacobi; the former of whom has extended his investigations to homogeneous functions of the second degree, and of an indefinite number of variables, while the latter has applied the results of such inquiries to the transformation of multiple integrals. A memoir on this subject has also been given to the world by Cauchy; and an ingenious paper by Professor De Morgan, on its geometrical relations, will be found in the 5th volume of the *Cambridge Philosophical Transactions*.

The most general conclusion to which the labours of the above-mentioned writers have led, is, that it is always possible to take away the products of the variables $x_1, x_2, \ldots x_m$, from a proposed homogeneous function of the second degree, Q, by the linear substitution of a new set of variables, $y_1, y_2, \ldots y_m$, connected with the original ones by the relation

$$x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_m^2 = y_1^2 + y_2^2 \ldots + y_m^2 \ldots (1);$$

or in other words, to determine, subject to (1), the values of

B

13.

ON THE THEORY OF LINEAR TRANSFORMATIONS.

[From the *Cambridge Mathematical Journal*, vol. IV. (1845), pp. 193—209.]

THE following investigations were suggested to me by a very elegant paper on the same subject, published in the *Journal* by Mr Boole. The following remarkable theorem is there arrived at. If a rational homogeneous function U, of the n^{th} order, with the m variables $x, y \ldots$, be transformed by linear substitutions into a function V of the new variables, $\xi, \eta \ldots$; if, moreover, θU expresses the function of the coefficients of U, which, equated to zero, is the result of the elimination of the variables from the series of equations $d_x U = 0$, $d_y U = 0$, &c., and of course θV the analogous function of the coefficients of V: then $\theta V = E^{n\alpha} . \theta U$, where E is the determinant formed by the coefficients of the equations which connect $x, y \ldots$ with $\xi, \eta \ldots$, [1] and $\alpha = (n-1)^{m-1}$. In attempting to demonstrate this very beautiful property, it occurred to me that it might be generalised by considering for the function U, not a homogeneous function of the n^{th} order between m variables, but one of the same order, containing n sets of m variables, and the variables of each set entering linearly. The form which Mr Boole's theorem thus assumes is $\theta V = E_1^{\alpha} . E_2^{\alpha} \ldots E_n^{\alpha} . \theta U$. This it was easy to demonstrate would be true, if θU satisfied a certain system of partial differential equations. I imagined at first that these would determine the function θU, (supposed, in analogy with Mr Boole's function, to represent the result of the elimination of the variables from $d_{x_1} U = 0$, $d_{y_1} U = 0, \ldots d_{x_2} U = 0$, &c.): this I afterwards found was not the case; and thus I was led to a class of functions, including as a particular case the function θU, all of them possessed of the same characteristic property. The system of partial differential equations was without difficulty replaced by a more fundamental system of equations, upon which, assumed as definitions, the theory appears to me naturally to depend; and it is this view of it which I intend partially to develope in the present paper.

[1] The value of α was left undetermined, but Mr Boole has since informed me, he was acquainted with it at the time his paper was written; and has given it in a subsequent paper.

La Teoria degli invarianti

Nel primo Boole generalizza il criterio per cui una forma quadratica è non degenere se e solo se il determinante è non zero.
In questo lavoro prende un qualunque polinomio omogeneo $f(x_1, \dots, x_m)$ di grado n in m variabili e trova un polinomio nei suoi coefficienti che non è nullo se e solo se, in termini moderni, l'ipersuperficie $f(x_1, \dots, x_m) = 0$ è singolare unicamente nell'origine.

Cayley capisce che questo polinomio è *invariante* per le trasformazioni lineari delle variabili x_i di determinante 1 e inizia lo studio delle possibili funzioni, dei coefficienti, che siano invarianti.

Nel 19^{mo} secolo

la Teoria degli invarianti si concentra sullo studio delle *forme binarie*

Le Forme binarie

Una *forma binaria*

è semplicemente un polinomio omogeneo in due variabili x_1, x_2.

Si parla di forme *lineari, quadratiche, cubiche, quartiche, quintiche etc.* per forme di grado 1, 2, 3, 4, 5,...
in generale per forme di grado q si parla di *quantiche*.

le forme binarie si ottengono *omogeneizzando i polinomi*

$$x_2^n \left(a_0(x_1/x_2)^n + a_1(x_1/x_2)^{n-1} + \ldots + a_n \right) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n.$$

Le forme binarie di grado n sono uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$, con coordinate i coefficienti a_i.

Le Forme binarie sono l'argomento della seconda parte del libro di Faà de Bruno

In generale abbiamo anche le forme *ternarie, quaternarie etc.* ovvero i polinomi omogenei in tre, quattro etc. variabili.

Il punto fondamentale

è che le sostituzioni lineari delle variabili trasformano ogni spazio di forme in se stesso.
Nel linguaggio moderno lo spazio dei polinomi omogenei di grado k in n variabili sono una *rappresentazione* del gruppo delle matrici $n \times n$.

Le rappresentazioni lineari

Nel linguaggio attuale

Si considera un gruppo G ed uno spazio vettoriale V.

Una rappresentazione lineare di G su V

è un omomorfismo di G nel gruppo $GL(V)$ di tutte le trasformazioni lineari.

Ovvero è *una azione* lineare

$$G \times V \to V, \ (g, v) \mapsto g \cdot v$$

$$1 \cdot v = v, \ g \cdot (h \cdot v) = (gh) \cdot v,$$

$$g \cdot (\alpha u + \beta v) = \alpha g \cdot u + \beta g \cdot v.$$

Rappresentazioni lineari ed invarianti

Nel linguaggio attuale

data una rappresentazione lineare di G su V

Si considerano i polinomi su V

Il gruppo G trasforma anche i polinomi secondo la semplice regola

$$g \cdot f(v) := f(g^{-1} \cdot v)$$

Se V ha dimensione n scelta una base, si ha per ogni grado che i polinomi di grado q sono proprio le forme n–arie q–uantiche.
Un polinomio f è *invariante* se

$$\boxed{g \cdot f = f, \ \forall g \in G}$$

Rappresentazioni lineari ed invarianti

data una rappresentazione lineare di G su V

calcolare gli invarianti è un problema usualmente molto difficile

Gli invarianti formano un algebra

per le forme binarie tale algebra è finitamente generata Teorema di Gordan

ha una descrizione esplicita fino a grado 12 (11 escluso).
I casi 7, 9, 10, 12 con l'ausilio di un computer.

Vi sono interessanti sviluppi teorici e problemi aperti.

Forme binarie e rappresentazioni di $SL(2, \mathbb{C})$

Denotiamo con V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Sia $G = GL(n, \mathbb{C})$ il gruppo delle matrici invertibili

data una rappresentazione lineare di G su V

V si decompone in somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Per $SL(2, \mathbb{C})$

La lista delle rappresentazioni irriducibili coincide con la lista degli spazi di forme binarie.

Forme binarie e rappresentazioni di $SL(2, \mathbb{C})$

Consideriamo i polinomi di grado k sulle forme binarie di grado n

ovvero i polinomi omogenei di grado k in $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Su di essi opera $SL(2, \mathbb{C})$

Questo spazio si decompone in rappresentazioni irriducibili ciascuna isomorfa ad uno spazio di forme binarie.

Questo da luogo alla idea di *covariante* che, in termini moderni, si trasforma nella *teoria del peso più alto*.

Covarianti e semi invarianti

Una formula fondamentale è dovuta a Clebsch e Gordan. In termini moderni se V_n rappresenta lo spazio delle forme binarie di grado n:

$$V_n \otimes V_m = \oplus_{i=0}^{\min(m,n)} V_{m+n-2i}$$

importante in meccanica quantistica,

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch
(19 Gennaio 1833 Köningsberg–
7 Novembre 1872 Göttingen)

Paul Albert Gordan
(27 Aprile 1837 Breslau–
21 Dicembre 1912 Erlangen)

Covarianti e semi invarianti

I covarianti delle forme binarie

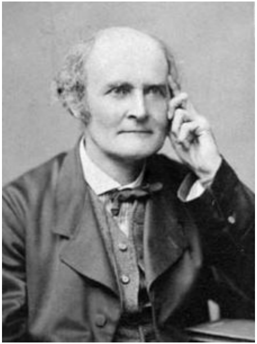
si identificano ai polinomi omogenei di grado k in $a_0, a_1, \ldots, a_n$ invarianti rispetto al gruppo delle matrici
$$\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La teoria si generalizza, Capelli–Deruyts

da luogo finalemente con Schur, Hilbert alla teoria delle rappresentazioni del gruppo lineare.

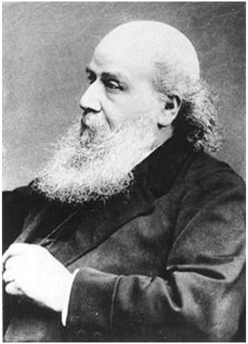
Due algebristi fondatori della teoria degli invarianti

Arthur Cayley



nato il 16 Agosto 1821
Richmond, Surrey, UK
morto il 26 gennaio 1895 (età 73) Cambridge, England

James Joseph Sylvester



nato il 3 Settembre 1814
London, England
morto il 15 marzo1897 (età 82) Oxford, England

Caratteri di $GL(n, \mathbb{C})$

Una osservazione fondamentale

Le funzioni polinomiali sulle matrici $n \times n$ invarianti per coniugazione tramite $GL(n, \mathbb{C})$ si identificano con i polinomi simmetrici negli autovalori.

Le rappresentazioni polinomiali di $GL(n, \mathbb{C})$

si decompongono in irriducibili, indicizzate da partizioni, con carattere le funzioni di Schur

La chiave è la Formula di Cauchy

$$\frac{1}{\prod_{i,j=1}^{n}(1 - x_i y_j)} = \sum_{\lambda} S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) S_\lambda(y_1, \ldots, y_n). \tag{1}$$

La formula di Cauchy

Per ogni partizione λ e spazio vettoriale $V = \mathbb{C}^n$ si costruisce un nuovo spazio $S_\lambda(V)$ su cui opera il gruppo $GL(V) = GL(n, \mathbb{C})$ in modo irriducibile. Esempio

$$S_{1^k}(V) = \bigwedge^k V, \qquad S_k(V) = S^k(V)$$

la potenza esterna e quella simmetrica.

la funzione di Schur $S_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ è il carattere (la traccia) sulle matrici diagonali.

La formula di Cauchy si interpreta

$$S^k(V \otimes W) = \oplus_{\lambda \vdash k} S_\lambda(V) \otimes S_\lambda(W).$$

Accanto ai lavori di Schur bisogna menzionare la teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico, di A. Young.
Il quale introduce i

simmetrizzatori e i diagrammi ed i tableaux standard.

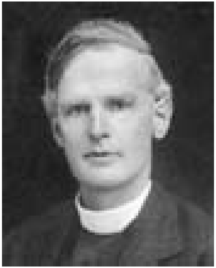
Per ogni partizione $\lambda \vdash n$ vi è una rappresentazione irriducibile M_λ di S_n.

La teoria che risulta dai lavori di Schur e Young è la
decomposizione degli spazi di tensori $V^{\otimes n}$ secondo la simmetria

$$\boxed{V^{\otimes n} = \oplus_{\lambda \vdash n} S_\lambda(V) \otimes M_\lambda}$$

Issai Schur
January 10, 1875 Mogilev, Died January 10, 1941 (aged 66) Tel Aviv, Mandatory Palestine

Alfred Young
16 Aprile 1873 – 15 Dicembre 1940



Teoria degli invarianti e geometrie non euclidee

Come nel caso delle funzioni simmetriche e la risolubilità per radicali delle equazioni, anche in questo caso la relazione fra teoria degli invarianti e lo sviluppo delle geometrie non Euclidee è indiretto.

Il punto qui è la nozione di simmetria nella geometria.

In Euclide c'è un assioma nascosto nel criterio che dice che due triangoli con lo stesso angolo e con gli stessi due lati uscenti da quel vertice sono uguali (congruenti).

Si tratta di assiomatizzare le proprietà del gruppo dei movimenti rigidi del piano

Teoria degli invarianti e geometrie non euclidee

Il punto qui è la nozione di simmetria nella geometria.

Da questo punto di vista una geometria ha un gruppo di simmetrie che soddisfa assiomi speciali, che permettono di parlare di punti rette angoli etc.

La geometria iperbolica Bolyai, Lobachevsky, Gauss

La geometria Euclidea, la geometria affine, la geometria proiettiva

La geometria secondo Riemann.

Le varie geometrie si possono vedere come *subordinate* alla geometria proiettiva.

La geometria proiettiva

Il piano proiettivo è descritto da *coordinate omogenee* (x_1, x_2, x_3)

Considerando $(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, ax_2, ax_3), \ a \neq 0$.
Il gruppo delle simmetrie è il *gruppo proiettivo* delle matrici invertibili 3×3 a meno di moltiplicazione per una costante non nulla.

Le varie geometrie si possono vedere come *subordinate* alla geometria proiettiva.

La geometria affine ha come gruppo di simmetrie il sottogruppo che fissa la retta $x_3 = 0$, la geometria Euclidea è subordinata alla geometria affine ed ha come gruppo di simmetrie il sottogruppo che fissa i *punti ciclici* $x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0$.

Le geometrie non euclidee

Le varie geometrie si possono vedere come *subordinate* alla geometria proiettiva.

La geometria *iperbolica* si ottiene secondo Beltrami e Klein prendendo l'interno di una conica, ad esempio un cerchio e definendo la distanza in modo opportuno (logaritmo di un birapproto)

La geometria *ellittica* secondo Riemann ha come modello il piano proiettivo ma come gruppo il sottogruppo che fissa una conica immaginaria. In realtà si può vedere come derivata dalla geometria della sfera.

Oltre le geometrie non euclidee

La geometria come uno spazio su cui opera un gruppo di simmetrie, transitivamente, è l'approccio del Programma di Erlangen di Klein.

Sophus Lie inizia lo studio infinitesimale dei possibili gruppi continui di simmetrie. La Teoria dei gruppi di Lie è stata uno dei grandi temi di ricerca degli ultimi 150 anni.

La geometria secondo Riemann è la base della geometria differenziale le simmetrie possono anche non esserci. Da un punto di vista fisico poi su queste idee matematiche si svilupperà la teoria della relatività generale di Einstein.

Uno dei grandi sviluppi della geometria

È la classificazione delle algebre di Lie semplici e poi degli spazi simmetrici d Killing e Cartan

Elie Cartan 9 Aprile 1869 Dolomieu, Isère, Francia
6 Maggio 1951 Paris

Wilhelm Karl Joseph Killing 10 Maggio 1847 Burbach 11 Febbraio 1923 Münster,

Hilbert e la teoria degli invarianti

Torniamo agli invarianti ricordiamo che Gordan aveva provato che gli invarianti di una forma binaria sono un algebra finitamente generata.
In una serie di lavori in cui Hilbert praticamente fonda la moderna algebra commutativa,

Hilbert prova che

gli invarianti di una forma in qualunque numero di variabili sono un algebra finitamente generata.

Gordan inizialmente rifiuta il metodo dicendo:
Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie. successivamente capisce l'importanza del metodo.

I 23 problemi di Hilbert

Al convegno di Parigi del 1900 Hilbert pone 23 problemi per il ventesimo secolo.

Il 14^{mo} problema di Hilbert

chiede se gli invarianti per un qualunque gruppo siano sempre un algebra finitamente generata?

Nel 1959 Masayoshi Nagata da un controesempio, la risposta è in generale negativa.

è positiva per i gruppi riduttivi

Hilbert ed Hermann Weyl

David Hilbert (23 Gennaio 1862 Köningsberg–
14 Febbraio 1943 Göttingen)

Hermann Klaus Hugo Weyl 9 Novembre 1885 Elmshorn
8 Dicembre 1955 Zurich

H. Weyl

Dopo i lavori di Hilbert la Teoria degli invarianti resta un po dormiente, invece si sviluppa la teria delle rappresentazioni e nel 1939 appare un libro difficile

Weyl, Hermann (1939), The Classical Groups. Their Invariants and Representations, Princeton University Press

In cui si mescolano le idee di Schur con quelle di Brauer e Weyl per mostrare in legame profondo fra algebra non commutativa e teoria degli invarianti.

H. Weyl

In realtà Hermann Weyl era molto motivato dallo sviluppo, allora recente della Meccanica quantistica
scrive nel 1928. un libro Gruppentheorie und Quantenmechanik
Nella Meccanica quantistica sia le nozioni di simmetria che quella di gruppo hanno un ruolo importante.

Chevalley, Borel, Cartan, Grothendieck, Mumford, Nagata

Un rinnovato interesse per la teoria degli invarianti viene dallo sviluppo della teoria dei Gruppi algebrici e dal problema della costruzione di spazi di moduli.
Mumford riprende la teoria di Hilbert in forma moderna e vi è una fiorente scuola matematica su questi temi.

Claude Chevalley

11 Febbraio 1909 Johannesburg
28 Giugno 1984 Paris, France

È uno dei massimi esponenti della teoria dei gruppo algebrici, uno dei suoi obiettivi era quello di trasportare la teoria dai gruppi di Lie, ovvero gruppi continui con coordinate numeri reali o complessi, ai gruppi finiti, in cui le coordinate sono in un campo finito.
In questo modo ha aperto la via alla classificazione dei gruppi finiti.
Chevalley produce serie infinite di gruppi semplici associati ai gruppi algebrici su campi finiti. Poi la classificazione si completa con la scoperta di 26 gruppi sporadici.

La classificazione di tutti i gruppi SEMPLICI finiti

è una delle vette dell'algebra del ventesimo secolo

Thompson e Tits hanno ricevuto nel 2008 il premio Abel per i loro contributi alla teoria.

Armand Borel ed Henry Cartan

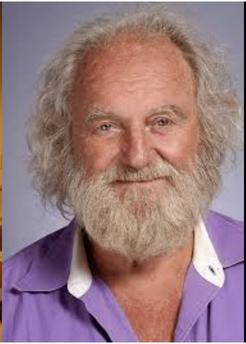
studiano profondi aspetti topologici nella teoria dei gruppi.

Alexander Grothendieck e David Mumford

costruiscono le basi della teoria moderna degli invarianti geometrica.

Ian Macdonald, Adriano Garsia, Gian Carlo Rota

Riprendono le teorie classiche, e sviluppano molte idee algebriche e combinatorie sulle funzioni simmetriche.
I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials,* 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, (1995).


Per concludere

Ho omesso moltissimi aspetti e moltissimi nomi importanti.
La teoria delle funzioni simmetriche e le rappresentazioni del gruppo simmetrico sono ancora un tema di ricerca con problemi aperti.

Vi sono problemi aperti anche nella classica teoria delle forme binarie!