CONVEGNO
FAÀ DI BRUNO

Politecnico di Torino, 22 Settembre 2017

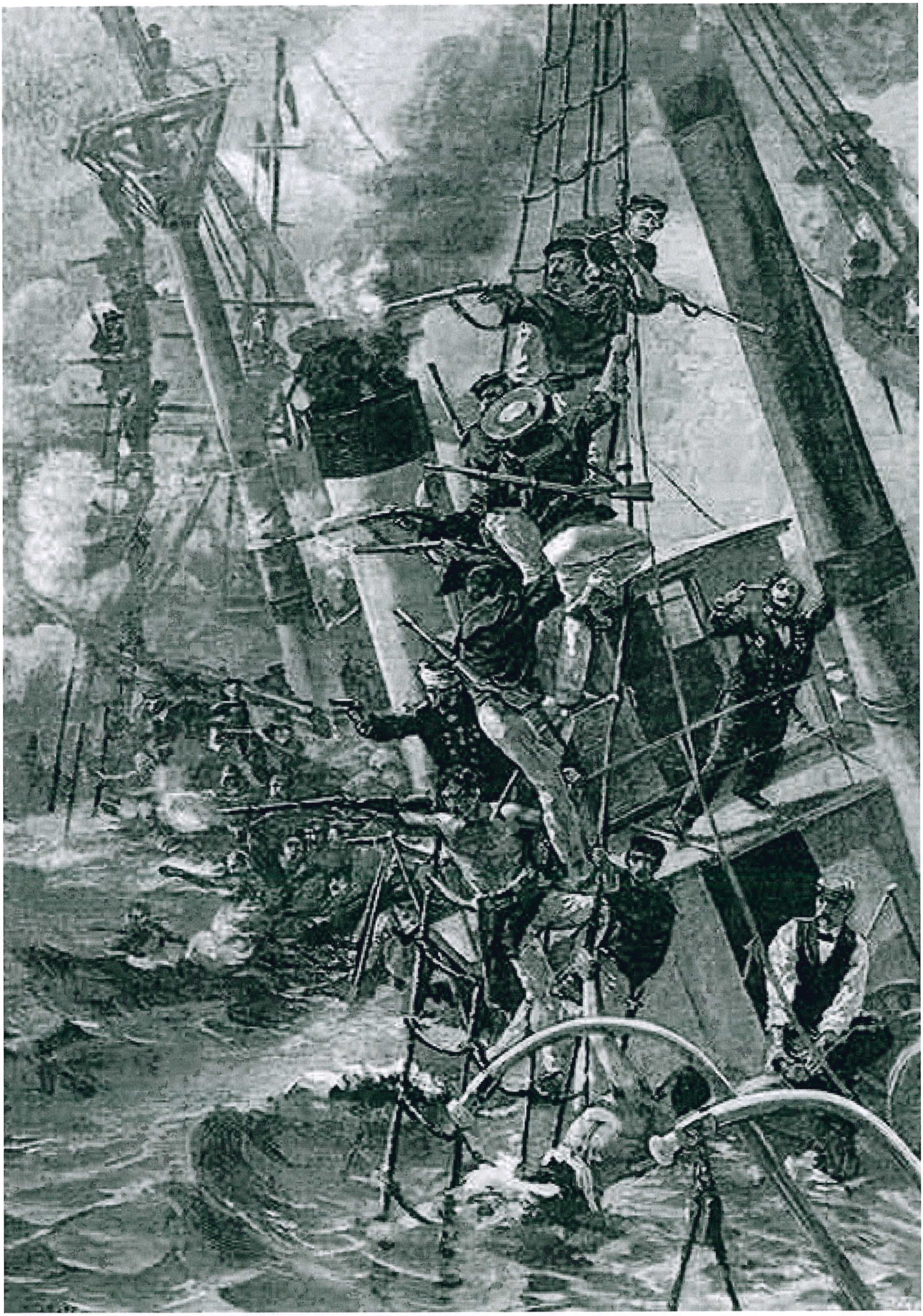
COMPOSIZIONE FUNZIONALE
E
SPAZI FUNZIONALI

Luigi Rodino
Università di Torino

Francesco Faà di Bruno,
ultimo di 12 figli, 5 maschi
e 7 femmine.

Fratelli:

- Alessandro: azienda agricola della famiglia
- Carlo Maria: religioso
- Giuseppe Maria: religioso
- Emilio: carriera militare



Formula di Faà di Bruno
per la derivata n-esima di una
funzione composta (1855)

1857 : Quarterly Journal of Pure
and Applied Mathematics

$$y = f(x) \quad , \; z = g(y) \quad , \; F(x) = g(f(x))$$

$$F'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

$$\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(x) = \sum_{\substack{1 \leq h \leq n \\ j_1 + \dots + j_h = n}} g^{(h)}(f(x))\, f^{(j_1)}(x) \cdots f^{(j_h)}(x)$$

$$(j_1, \dots, j_h \geq 1)$$

alcuni termini compaiono più volte,
precisamente :

$$F^{(n)}(x) =$$

$$n! \sum_{1 \le h \le n} \frac{g^{(h)}(f(x))}{h!} \sum_{j_1 + \dots + j_h = n} \frac{f^{(j_1)}(x)}{j_1!} \cdots \frac{f^{(j_h)}(x)}{j_h!}$$

formula di Faà di Bruno:

$$F^{(n)}(x) =$$

$$\sum g^{(h)}(f(x)) \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n}$$

dove $k_1 + \dots + k_n = h$

$$k_1 + 2k_2 + \dots + n k_n = n$$

$$(k_1, \dots, k_n \geq 0)$$

Estensioni al caso multidimensionale

LA COMPOSIZIONE NEGLI SPAZI FUNZIONALI

$f \in A$, g fissata, $g \in B$, $F(x) = g(f(x))$

Operatore di NEMYTSKIJ

$$f \in A \longrightarrow F \in A \text{ (od altro spazio)}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ESEMPIO 1. $C^0(\mathbb{R})$ = funzioni continue in $\mathbb{R}$

Se $f, g \in C^0(\mathbb{R})$, allora $F \in C^0(\mathbb{R})$.

ESEMPIO 2 $C^m(\mathbb{R})$ = funzioni con derivate continue fino all'ordine m.

Se $f, g \in C^m(\mathbb{R})$, allora $F \in C^m(\mathbb{R})$.

Dimostrazione

$$F^{(n)}(x) = \sum \underbrace{g^{(h)}(f(x))}_{\substack{\cap \\ C^0(\mathbb{R}) \\ \text{(ESEMPIO 1)}}} \underbrace{f^{(j_1)}(x)}_{\substack{\cap \\ C^0(\mathbb{R})}} \cdots \underbrace{f^{(j_h)}(x)}_{\substack{\cap \\ C^0(\mathbb{R})}}$$

$$h, j_1, \ldots, j_h \leq n \leq m$$

ESEMPIO 3 - GLI SPAZI DI SOBOLEV

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ per ogni } n,\ 0 \le n \le s \right\}$$

La definizione può estendersi ad $s \in \mathbb{R}_+$.

Sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $g(0) = 0$.

Sia $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$, $s > 0$, $F(x) = g(f(x))$.

Allora $F \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ e

$$\|F\|_{H^s} \le C \|f\|_{H^s}$$

con C dipendente solo da g e $\|f\|_{L^\infty}$.

Dimostrazione

$$\|F^{(m)}\|_{L^2} \le \sum \|g^{(h)}(f(x))\|_{L^\infty} \underbrace{\|f^{(j_1)} \cdots f^{(j_h)}\|_{L^2}}_{\le\, C \|f\|_{H^s}}$$

$$j_1 + \cdots + j_h \le m \le s$$

SUR LA

NATURE ANALYTIQUE DES SOLUTIONS

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(PREMIER MÉMOIRE),

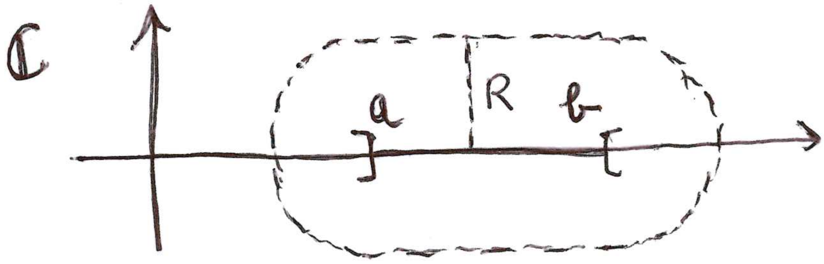
PAR M. MAURICE GEVREY.

SOMMAIRE (1).

(1) Le présent Mémoire, qui devait paraître fin 1914 et dont la guerre a interrompu la rédaction, est le développement d'une Note insérée aux *Comptes rendus* (8 décembre 1913). Le n° 8 reproduit une leçon faite au Collège de France en 1914.

CAUCHY 1840

$\mathcal{A}$ = funzioni analitiche di variabile reale



$$|f^{(n)}(x)| \leq M C^n n! \quad , \quad C = \frac{1}{R}$$

Se $f, g \in \mathcal{A}$ allora la composizione funzionale $F(x) = g(f(x))$ appartiene ad $\mathcal{A}$

HOLMGREN 1901

$f(x,y)$ soluzione di $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

supponiamo $f \in \mathcal{A}$ rispetto ad x

$$|\partial_x^n f(x,y)| \leq M C^n n!$$

allora

$$|\partial_y^n f(x,y)| = |\partial_x^{2n} f(x,y)| \leq M C^{2n} (2n)! \leq \tilde{C}^{2n+1} (n!)^2$$

Maurice Joseph GEVREY (1884 - 1957)

classe di Gevrey G^s di ordine s, $1 \leq s < \infty$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M C^n (n!)^s$$

$$G^1 = \mathcal{A} \quad , \quad G^\infty \stackrel{def}{=} C^\infty$$

- Le soluzioni dell' equazione del calore sono di classe G^2

- La composizione funzionale $F(x) = g(f(x))$ di funzioni G^s è G^s

dimostrazione di Gevrey

$$F^{(n)}(x) = \sum \underbrace{A_{h,k}}_{\text{costanti universali}} g^{(h)}(f(x)) (f')^{k_1} \dots (f^{(n)})^{k_n}$$

Utilizzo delle classi di Gevrey (e della formula di Faà di Bruno) nello studio delle equazioni alle derivate parziali

Hörmander 1958

$P(D)$ operatore alle derivate parziali a coefficienti costanti di ordine m

$$\Big\updownarrow \text{ applicazione simbolo}$$

$P(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, polinomio di grado m

<u>Definizione</u>. $P(D)$ è detto s-ipoellittico se tutte le soluzioni f di $P(D)f = 0$ sono di classe G^s.

<u>Teorema</u>. $P(D)$ è s-ipoellittico se e solo se

$$P(\zeta) = 0,\ \zeta \in \mathbb{C}^n \Rightarrow |\operatorname{Im} \zeta| \geq \varepsilon |\zeta|^{1/s}$$
$$\text{per } |\zeta| \geq C$$

<u>Esempio 1</u> L'operatore del calore è 2-ipoellittico.

<u>Esempio 2</u> Gli operatori 1-ipoellittici sono gli operatori ellittici, le soluzioni sono in $\mathcal{A}$.

ROUMIEU 1960

s-varietà, $1 \leq s < \infty$

le mappe di passaggio da una carta all'altra sono di classe G^s

1-varietà = varietà analitiche reali

$$\mathcal{A} \subset G^s \subset C^\infty \subset C^0$$

Esistono sfere esotiche Gevrey?